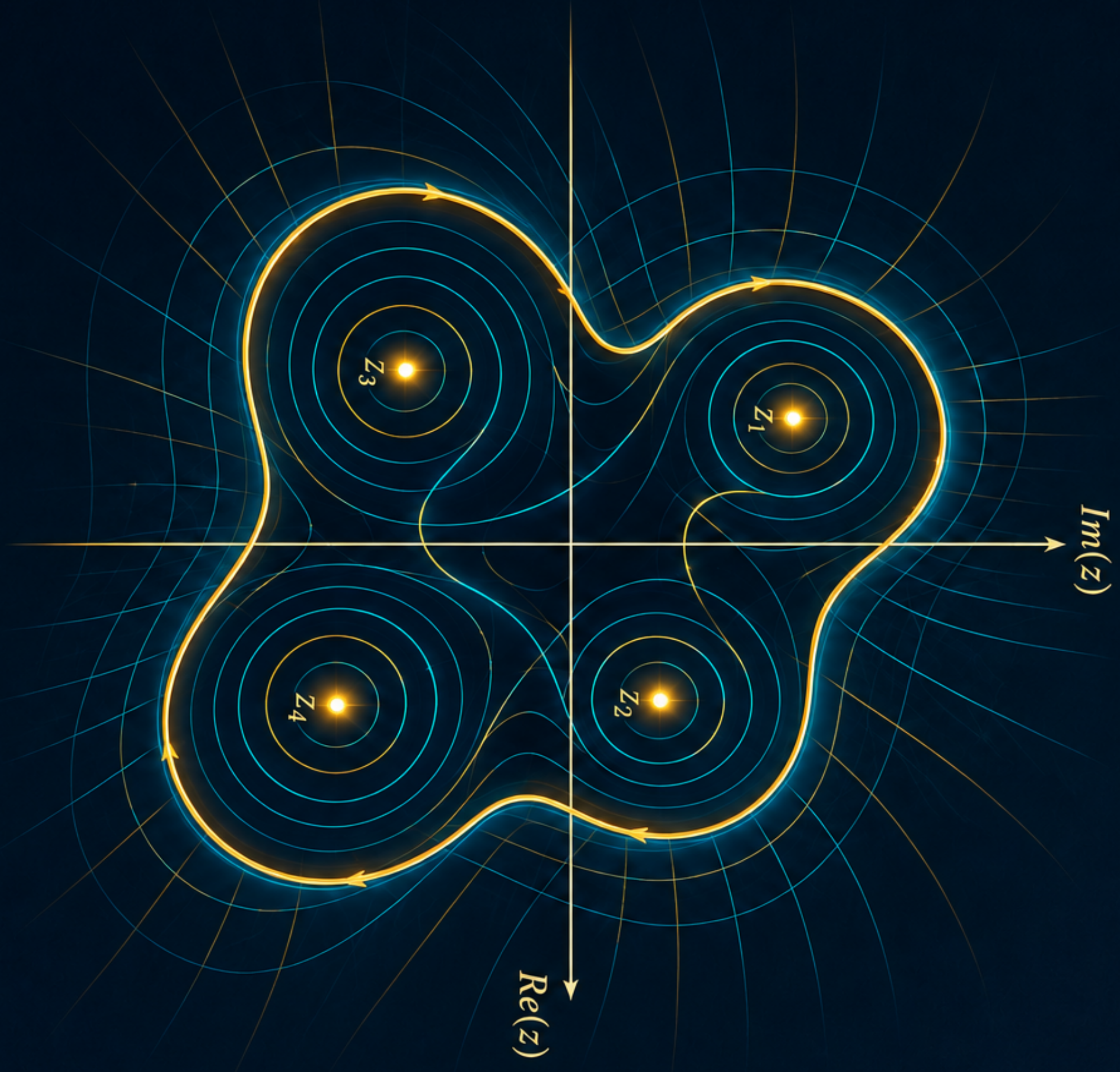


آنالیز مختلط

از هندسه صفحه تا فیزیک میدان‌ها و تبدیل‌های مهندسی



به قلم: جواد مردوخ‌چی

پیش‌گفتار مؤلف

سال‌هاست که ریاضیات دانشگاهی در هزارتویی از تعاریف خشک، قضایای انتزاعی و فرمول‌های حفظ‌محور گرفتار شده است؛ جایی که شهود و زیبایی ذاتی مفاهیم، زیر بار نمادهای سنگین دفن می‌شوند.

اما «آنالیز مختلط» یک جبر مکانیکی نیست؛ بلکه یک تماشای هندسی ناب و سفری پویا در ساختار فضا و میدان‌هاست.

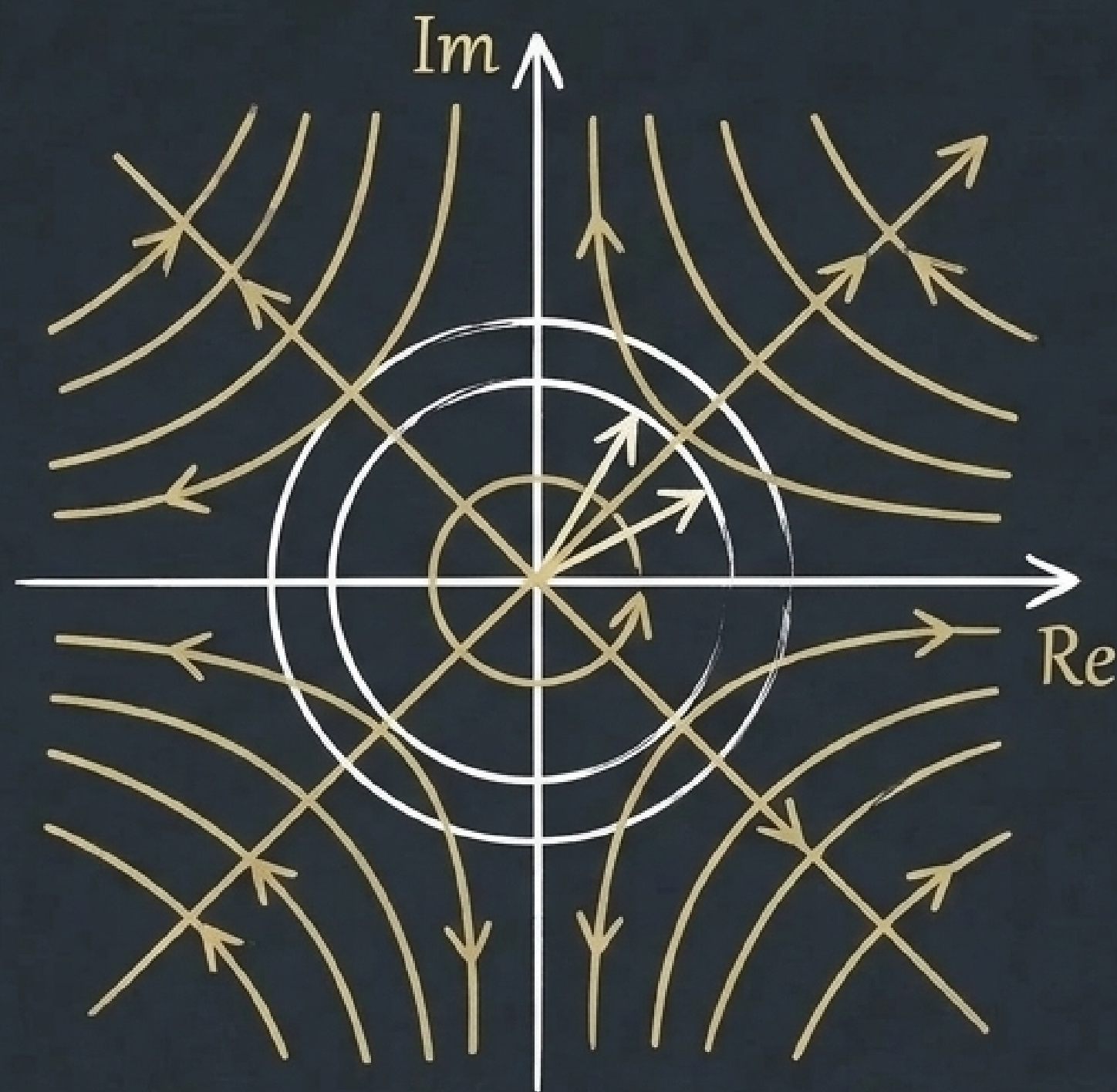
متدولوژی این کتاب بر پایه‌ی تصویرسازی ذهنی بنا شده تا مرزهای انتزاع را بشکند و به هر معادله کالبدی شهودی و ملموس ببخشد.

این شما و این، نگاهی با عمقی بیش از معمول به آنالیز مختلط.

ارادتمند شما،

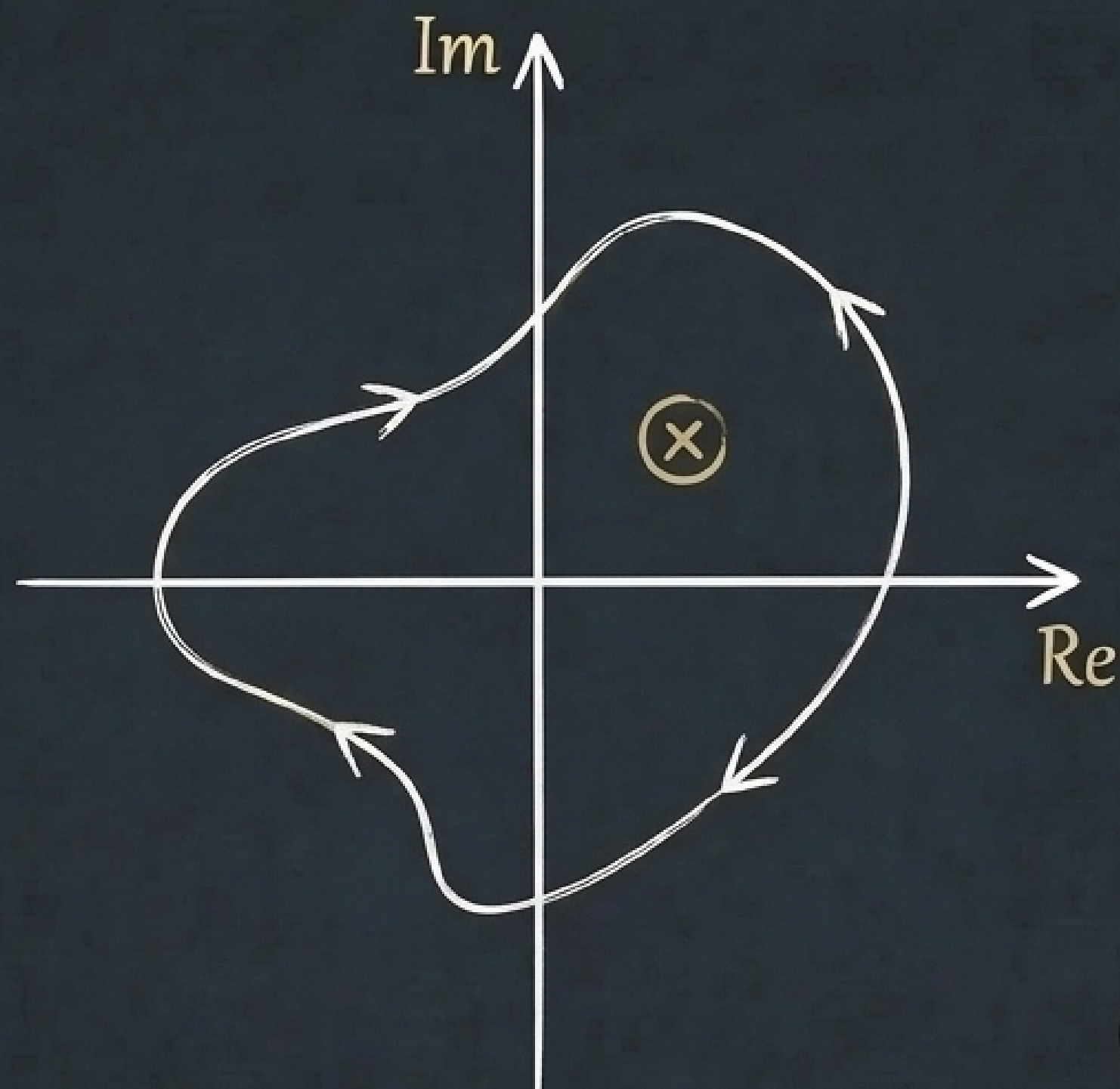
جواد مردوخ — تابستان داغ ۱۴۰۵

بخش اول: هندسه و الفبای صفحه مختلط



- فصل ۱: مبانی آنالیز مختلط
(آشنایی با اعداد مختلط و جبر پایه)
- فصل ۲: رمزگشایی از فرمول اوایلر
(درک شهودی فرم قطبی)
- فصل ۳: معماری و نگاشت توابع مختلط (تبدیل نواحی)
- فصل ۴: لگاریتم‌های مختلط (شاخه اصلی و سطوح ریمان)
- فصل ۵: ریشه‌یابی و توان‌های مختلط (تکنیک‌های هندسی)

بخش دوم: حساب دیفرانسیل و پل ارتباطی با فیزیک



• فصل ۶: توابع تحلیلی و معادلات کوشی-ریمان

• فصل ۷: توابع تحلیلی و معادله لاپلاس (توزیع حرارت)

بخش سوم: حساب انتگرال کانتوری و مانده‌ها

• فصل ۸: مبانی انتگرال‌گیری مختلط و قضیه کوشی

• فصل ۹: ناوبری در صفحه مختلط (انتخاب مسیرها)

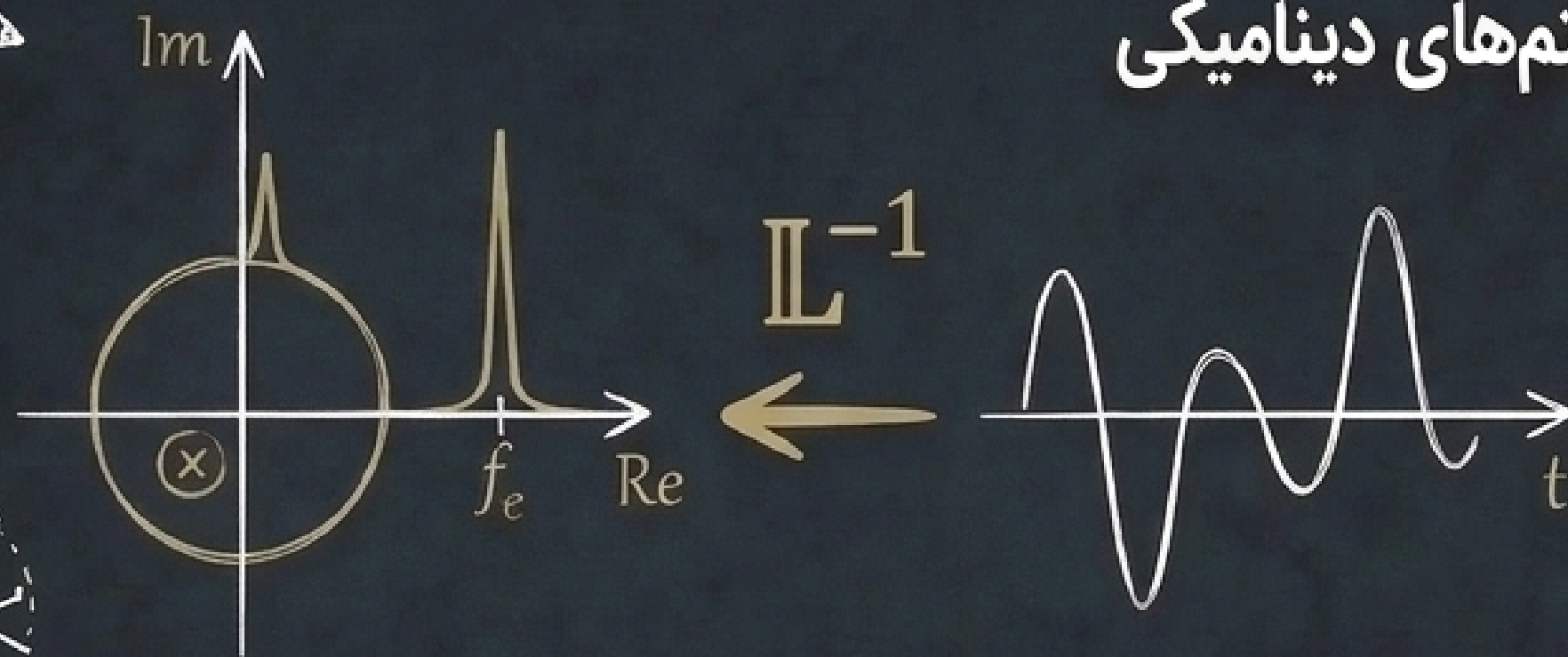
• فصل ۱۰: معماری قطب‌ها و محاسبه مانده‌ها

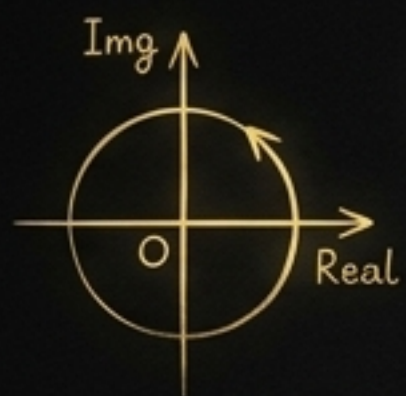
• فصل ۱۱: نقشه راه جامع انتگرال‌گیری (تکنیک‌های نوین)

بخش چهارم: افق‌های کاربردی در ریاضیات مهندسی

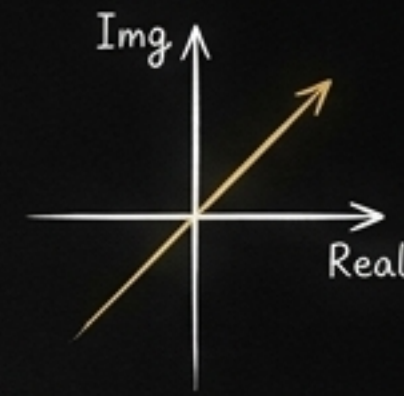
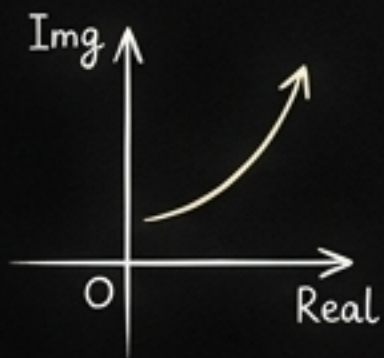
• فصل ۱۲: مکانیک تبدیل لاپلاس معکوس

زیرعنوان: بازگشت از دنیای فرکانس‌ها به تحلیل سیستم‌های دینامیکی





فصل هشتم

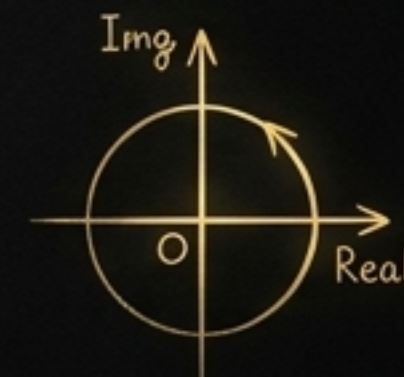


L

X

X

L



انتگرال‌ها در صفحه مختلط

هدف یادگیری: آشنایی با اهداف دوره، پیش‌نیازها و مسیر یادگیری انتگرال‌های مختلط.

۱. مفهوم: در این درس یاد می‌گیریم چگونه از توابع مختلط در طول مسیرهای مشخص (کانتورها) انتگرال بگیریم و چه زمانی این انتگرال‌ها مستقل از مسیر هستند.

۲. شهود: همانطور که در دنیای واقعی مسافت طی شده را محاسبه می‌کنیم، در صفحه مختلط نیز در امتداد مسیرها حرکت کرده و مقادیر تابع را جمع می‌زنیم.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

← پیش‌نیازها: توابع تحلیلی، مشتقات مختلط، معادلات کوشی-ریمان و قضیه گرین.

← اهداف یادگیری:

- بسط دادن انتگرال‌های مختلط به بخش‌های حقیقی و موهومی.
- درک قضیه کوشی-گورسا و دلیل صفر شدن انتگرال مسیرهای بسته.
- یادگیری استقلال از مسیر و تغییر شکل مسیرها.
- محاسبه کران ML برای تخمین انتگرال‌ها.

۴. مثال کاربردی: محاسبه نیروی برا روی یک بال هواپیما با استفاده از جریان پتانسیل، نیازمند انتگرال‌گیری در صفحه مختلط است.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

آیا در این درس فقط با مسیرهای خطی مستقیم سر و کار داریم؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

خیر، ما در امتداد منحنی‌ها، مسیرهای بسته و مسیرهای تغییر شکل یافته انتگرال می‌گیریم.

اشتباه رایج: فکر کنید انتگرال مختلط کاربردی در دنیای واقعی ندارد (در فیزیک و مهندسی بسیار حیاتی است!).



کالبدشکافی تابع و متغیر مختلط

هدف یادگیری: شناخت اجزای سازنده یک تابع مختلط پیش از انتگرال‌گیری.

۱. مفهوم:

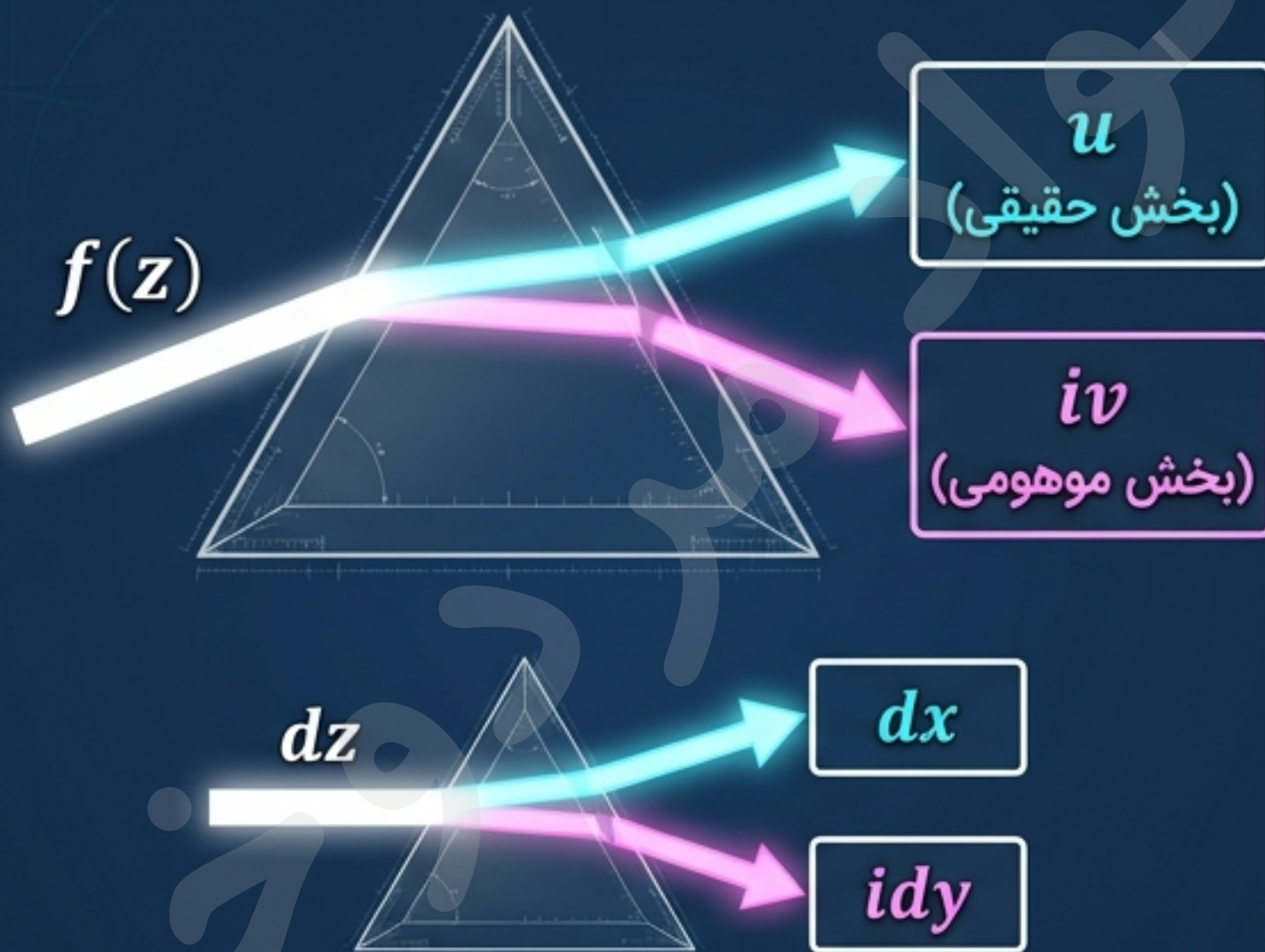
یک متغیر مختلط (z) و تابع آن $f(z)$ هر دو به دو بخش **حقیقی** و **موهومی** تقسیم می‌شوند.

۲. شهود:

هر نقطه و هر تابعی در این فضا، دارای دو مختصات جداگانه (طول و عرض جغرافیایی) است که با هم کار می‌کنند.

اشتباه رایج:

فراموش کردن ضرب کردن بخش موهومی در i هنگام جدا کردن اجزای تابع.



۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- تابع u نشان‌دهنده بخش **حقیقی** خروجی تابع است.

- تابع v نشان‌دهنده بخش **موهومی** (با ضریب i) است.

- **فرمول کلیدی:**

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$$

۴. مثال کاربردی:

اگر تابع ما $f(z) = z^2$ باشد، بخش حقیقی آن $u = x^2 - y^2$ و بخش موهومی آن $v = 2xy$ خواهد بود.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

در عبارت $dz = dx + idy$ ، متغیر dx نشان‌دهنده چیست؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

نشان‌دهنده تغییرات بی‌نهایت کوچک در راستای محور حقیقی x .

چرا انتگرال مختلط؟

هدف یادگیری: درک کاربردها و اهمیت انتگرال‌گیری در صفحه مختلط برای مسائل دنیای واقعی.

۱. مفهوم و شهود:

انتگرال‌های مختلط ابزارهایی قدرتمند برای حل مسائل پیچیده فیزیکی و ریاضی هستند که در دنیای اعداد حقیقی غیرقابل حل یا بسیار دشوارند. رفتن به صفحه مختلط مانند استفاده از تونلی در بعد چهارم است که مسیر کوهستانی سخت را ساده‌تر می‌کند.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- **آئرودینامیک:** محاسبه نیروی برا روی مقطع بال هواپیما.
- **فیزیک و مهندسی:** پتانسیل‌های الکترواستاتیک و معادلات حرارت حالت پایدار.
- **ریاضیات:** محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس مستقیماً به انتگرال حلقه‌بسته نیاز دارد.

۴. مثال کاربردی:

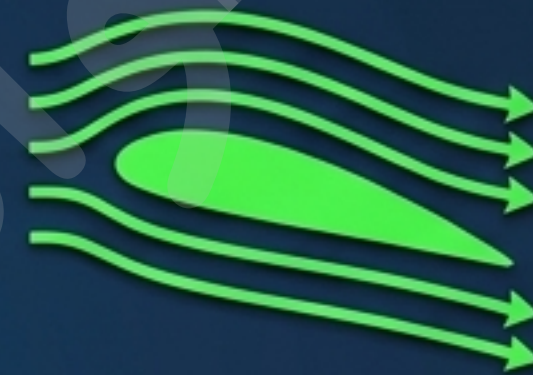
طراحی بال هواپیما نیازمند استفاده از انتگرال مختلط برای محاسبه جریان هوای دور بال در حالت ایده‌آل است.

بررسی کوتاه (پاسخ):

بله، زیرا این تئوری‌ها پایه الگوریتم‌های محاسباتی کامپیوترها در فیزیک هستند.

اشتباه رایج:

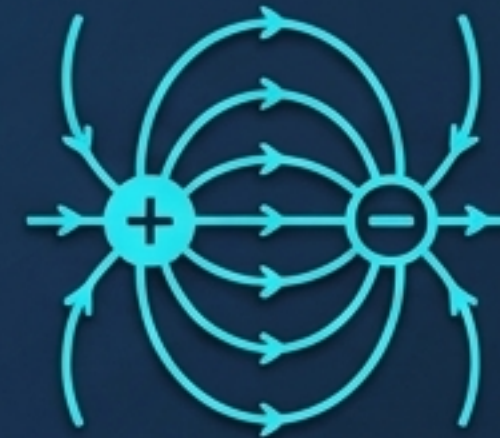
تصور اینکه مختلط به معنای غیرواقعی است و در مهندسی کاربرد ندارد.



آئرودینامیک



انتقال حرارت



الکترواستاتیک



تبدیلات لاپلاس

بسط دادن انتگرال

هدف یادگیری: یادگیری نحوه ضرب و بسط جبری یک انتگرال مختلط به دو انتگرال حقیقی.

۱. مفهوم:

انتگرال یک تابع مختلط را می‌توان با ضرب متقاطع اجزای آن، به مجموع دو انتگرال حقیقی تبدیل کرد.

۲. شهود:

مانند ضرب دو چندجمله‌ای است. تمام ترکیب‌ها را ضرب کرده و قسمت‌های بدون i را از قسمت‌های دارای i جدا می‌کنیم.

$$\int (u + iv)(dx + idy)$$

udx $uidv$ $ivdx$ i^2vdy

بخش حقیقی

$$\int (udx - vdy)$$

$\uparrow$
 $\Delta i^2 = -1$

بخش موهومی

$$i \int (vdx + udy)$$

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- فرمول اولیه: $\int (u + iv)(dx + idy)$
- ضرب متقاطع چهار جمله تولید می‌کند:
 $udx, uidv, ivdx, i^2vdy$ Δ
- هشدار: به یاد داشته باشید که $i \times i = -1$ است.
- بخش حقیقی: $\int (udx - vdy)$
- بخش موهومی: $i \int (vdx + udy)$

۴. مثال کاربردی:

برای محاسبه انتگرال روی مسیر C ، کافیست مقادیر u و v را در طول x و y به صورت دو انتگرال دو بعدی محاسبه کنیم.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

چرا در بخش حقیقی عبارت $-vdy$ ظاهر می‌شود؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

زیرا از ضرب iv در idy عبارت i^2vdy تولید می‌شود و $i^2 = -1$ است.

مفهوم دامنه تحلیلی

هدف یادگیری: درک اهمیت و نقش توابع تحلیلی به عنوان مناطق امن برای انتگرال گیری.

۱. مفهوم و شهود:

تابع تحلیلی تابعی است که در یک ناحیه فاقد هرگونه نقطه تکین، بریدگی یا رفتار عجیب باشد.

۲. شهود:

دامنه تحلیلی را مانند یک دشت هموار در نظر بگیرید. هیچ پرتگاه یا مانعی وجود ندارد که حرکت شما را مختل کند.

۳. نحوه کارکرد/ نکات کلیدی:

- یک تابع روی مسیر تحلیلی است، اگر هیچ تقطیع یا تقسیمی بر صفر رخ ندهد.

- توابعی مثل z^2 و e^z در تمام صفحه مختلط تحلیلی هستند.

- مسیر کانتور باید کاملاً درون این ناحیه امن قرار بگیرد.

۴. مثال کاربردی و بررسی:

تابع $f(z) = 1/(z-2)$ در همه جا به جز نقطه $z=2$ تحلیلی است.

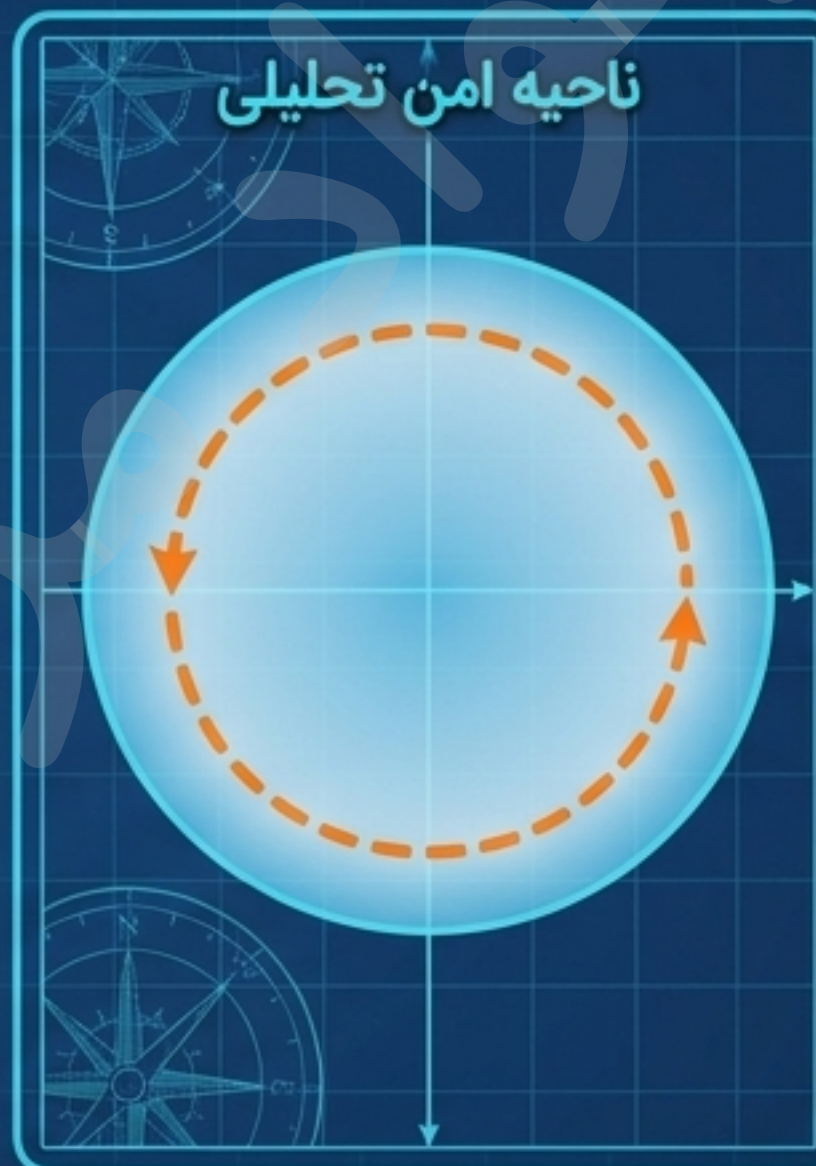
۵. بررسی کوتاه (سؤال):

آیا تابع e^z درون یک دایره بسته دلخواه تحلیلی است؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

بله، توابع نمایی در همه جای صفحه مختلط تحلیلی هستند.

ناحیه امن تحلیلی

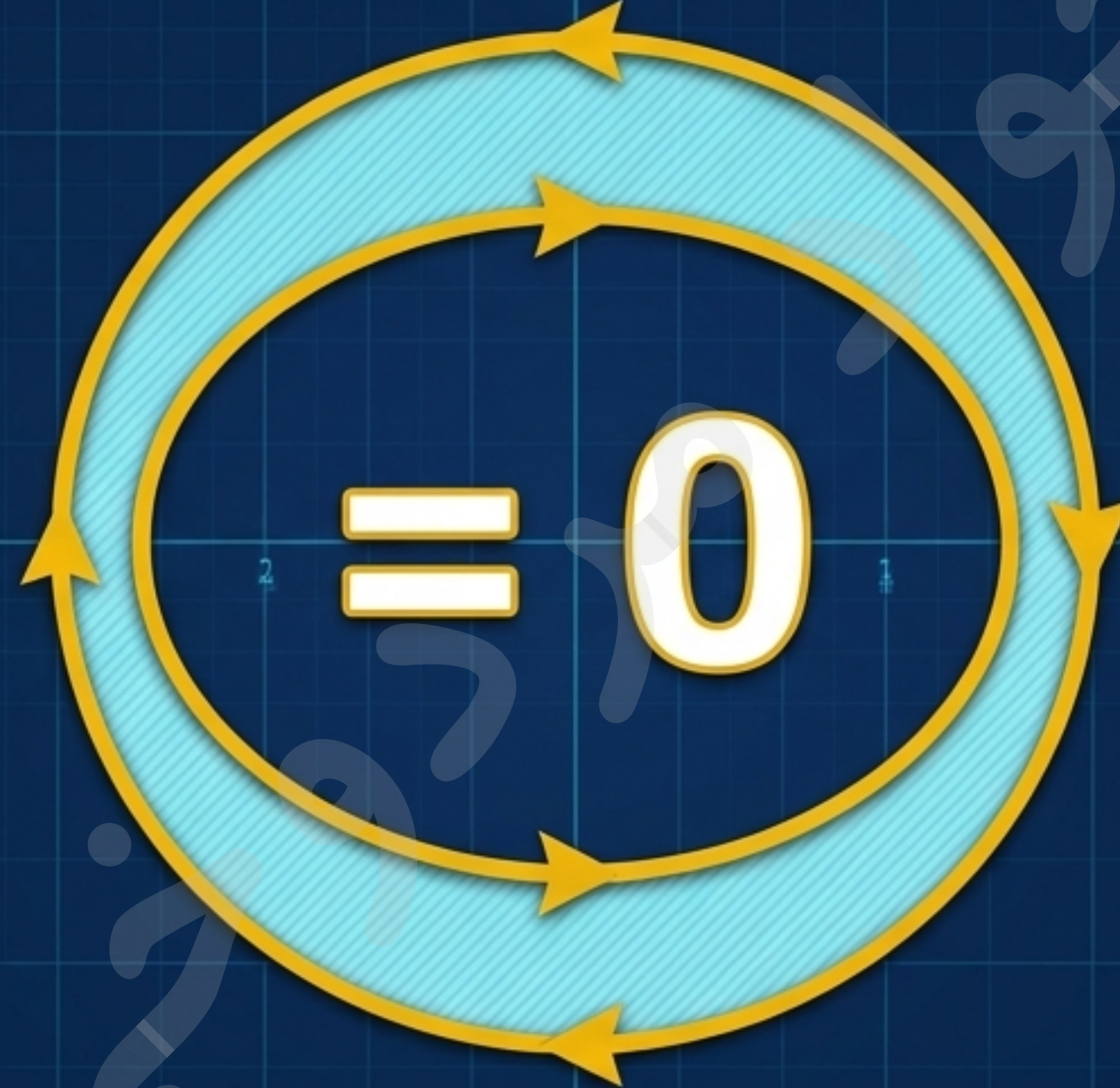


اشتباه رایج:

اشتباه رایج: فرض اینکه کانتور می تواند از روی نقطه تکین عبور کند.

قضیه کوشی-گورسا

هدف یادگیری: یادگیری مهم‌ترین قضیه انتگرال‌گیری مختلط و نتیجه حرکت در یک حلقه بسته.



۱. مفهوم: اگر یک تابع مختلط در داخل و روی یک منحنی بسته ساده تحلیلی باشد، انتگرال آن دقیقاً برابر با صفر است.

۲. شهود: اگر در یک دشت هموار از نقطه‌ای شروع به حرکت کنید و به همان نقطه بازگردید، مجموع تغییرات خالص صفر خواهد بود.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- فرمول کلیدی: $\oint_C f(z) dz = 0$

- کانتور باید بسته باشد.

- شرط حیاتی: هیچ نقطه تکینی نباید داخل یا روی حلقه باشد.

۴. مثال کاربردی:

انتگرال تابع z^3 روی یک دایره کامل به ۵ برابر صفر است.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

اگر انتگرال تابع $\frac{1}{z}$ را روی دایره‌ای حول مبدا بگیریم، آیا جواب صفر است؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

خیر، چون تابع در $z=0$ تحلیلی نیست.

⚠ اشتباه رایج: اعمال این قضیه برای مسیرهایی که در آن‌ها تابع نقطه تکین دارد.

شهود فیزیکی قضیه

هدف یادگیری: اتصال قضیه کوشی-گورسا به مفاهیم آشنای فیزیک و مهندسی.

۱. مفهوم: انتگرال صفر روی مسیر بسته معادل مفهوم میدان‌های برداری پایستار در فیزیک است.

۲. شهود: فرض کنید از یک کوه بالا می‌روید (انرژی صرف می‌کنید) و سپس پایین می‌آیید (انرژی پس می‌گیرید). مجموع انرژی مصرف‌شده خالص صفر است.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

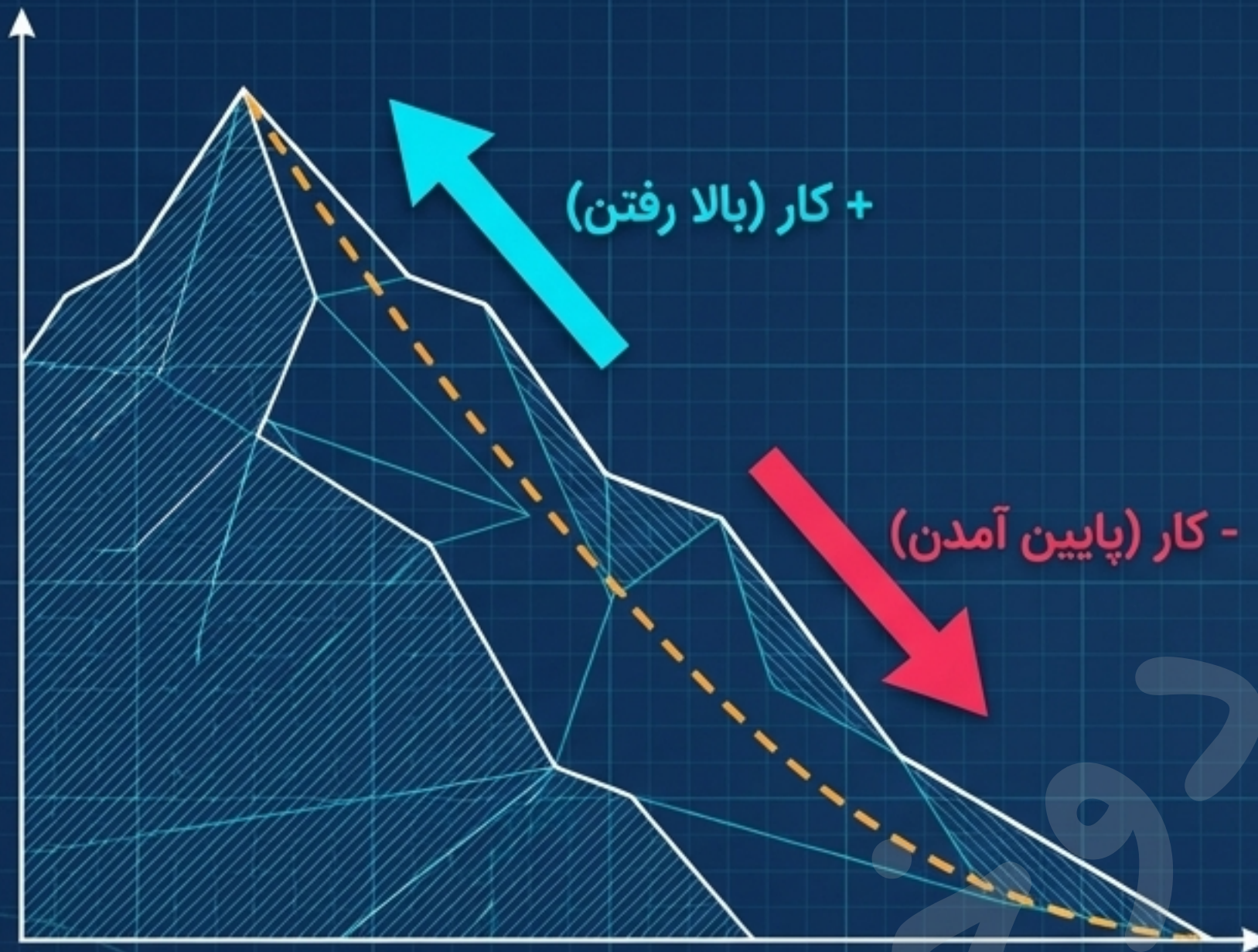
- یک تابع تحلیلی رفتاری شبیه به گرادیان یک تابع پتانسیل دارد.
- انتگرال‌گیری از این تابع مانند محاسبه کار در طول یک مسیر است.
- وقتی مسیر بسته است، کار خالص در یک میدان پایستار صفر است.

۴. مثال کاربردی: در آئرودینامیک بال هواپیما در حالت ایده‌آل (بدون گردابه)، مجموع چرخش جریان هوای دور آن صفر خواهد بود.

۵. بررسی کوتاه (سؤال): چرا بالا و پایین رفتن از کوه به فهم این قضیه کمک می‌کند؟

بررسی کوتاه (پاسخ): نشان می‌دهد تغییرات به نقطه شروع و پایان بستگی دارد.

⚠ اشتباه رایج: فراموش کردن اینکه این قانون فقط در صورت عدم وجود گردابه (تکینگی) کار می‌کند.



انرژی خالص = ۰

اثبات با قضیه گرین

هدف یادگیری: درک چگونگی اثبات قضیه کوشی-گورسا با استفاده از حسابان برداری.

۱. مفهوم:

قضیه گرین به ما اجازه می‌دهد یک انتگرال خطی (روی لبه C) را به یک انتگرال سطحی (روی مساحت داخلی S) تبدیل کنیم.

۲. شهود:

محاسبه مقدار چیزی که از مرزهای یک باغ می‌گذرد، معادل محاسبه مجموع تمام چشمه‌ها و چاه‌های داخل خود باغ است.



۴. مثال کاربردی:

اگر مرز یک مربع باشد، به جای جمع زدن مقادیر روی ۴ ضلع، مشتقات تابع را در کل مساحت داخل مربع جمع می‌زنیم.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- طبق قضیه گرین، انتگرال خطی تبدیل می‌شود به انتگرال دوگانه سطحی.

$$\oint_C (u dx - v dy) \rightarrow \iint_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_C (v dx + u dy) \rightarrow \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

- اکنون دو انتگرال دوگانه روی مساحت داخلی داریم.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

قضیه گرین انتگرال روی خط را به چه چیزی تبدیل می‌کند؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

به انتگرال دوگانه روی مساحت محصور توسط آن خط.

نقش معادلات کوشی-ریمان

هدف یادگیری: تکمیل اثبات قضیه با نشان دادن دلیل صفر شدن انتگرال‌های مساحتی.

۱. مفهوم: با جابگذاری معادلات کوشی-ریمان در نتیجه قضیه گرین، انتگراندها مستقیماً صفر می‌شوند.

۲. شهود: شرط تحلیلی بودن مانند یک تعادل کامل بین بخش حقیقی و موهومی است. دو نیروی مخالف دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند.

۳. نحوه کارکرد/ نکات کلیدی:

- شرط ۱: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

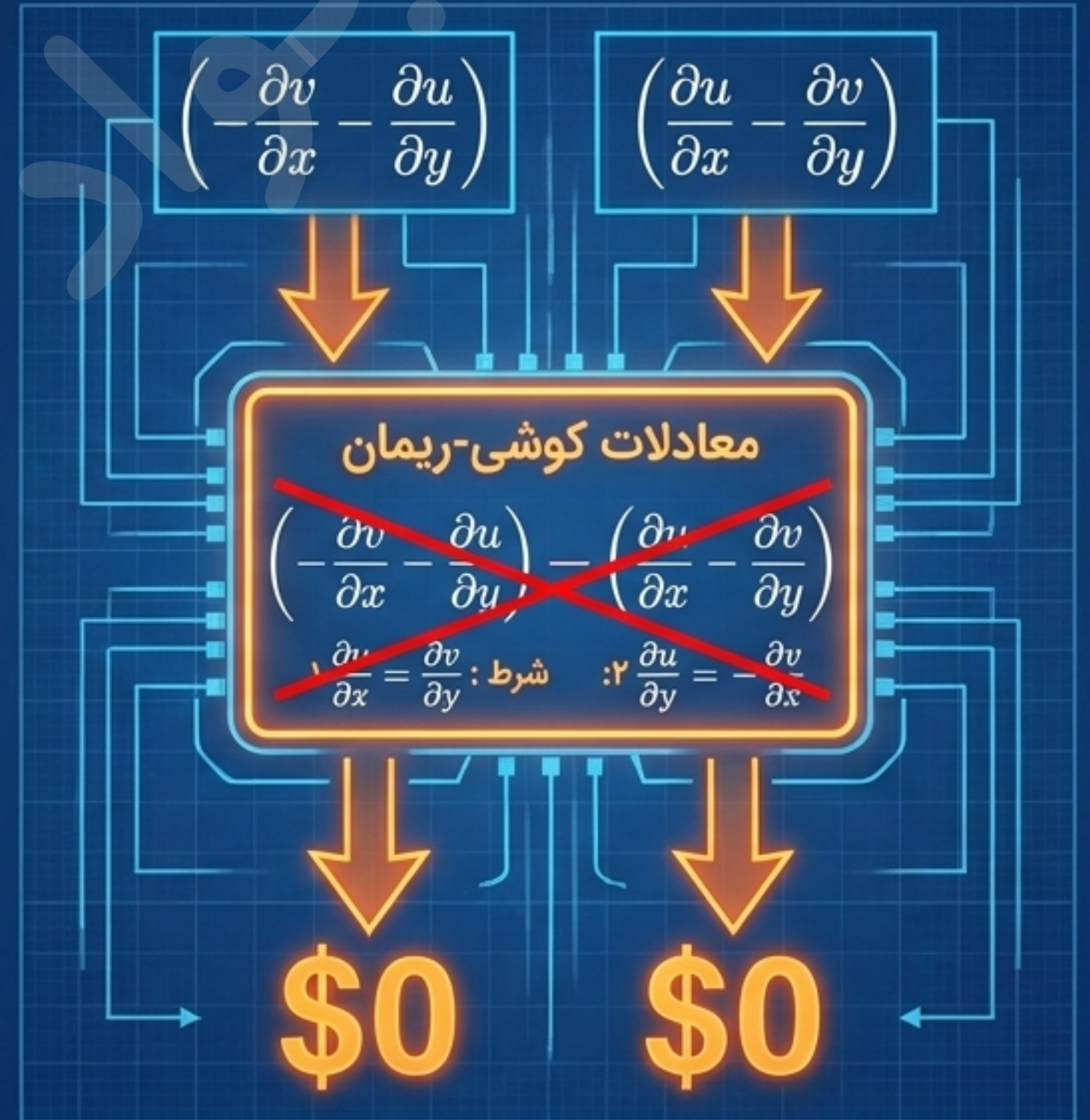
- شرط ۲: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

- در بخش موهومی قضیه گرین: $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$. طبق شرط ۱، این مقدار صفر است.
- در بخش حقیقی قضیه گرین: $\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. طبق شرط ۲، این مقدار صفر است.
- نتیجه: هر دو انتگراند دقیقاً صفر می‌شوند.

۴. مثال کاربردی: به دلیل تحلیلی بودن $f(z) = e^z$ در همه جا، مشتقات جزئی خنثی شده و انتگرال حلقه صفر می‌شود.

۵. بررسی کوتاه (سؤال): چرا فرض کردیم تابع تحلیلی است؟

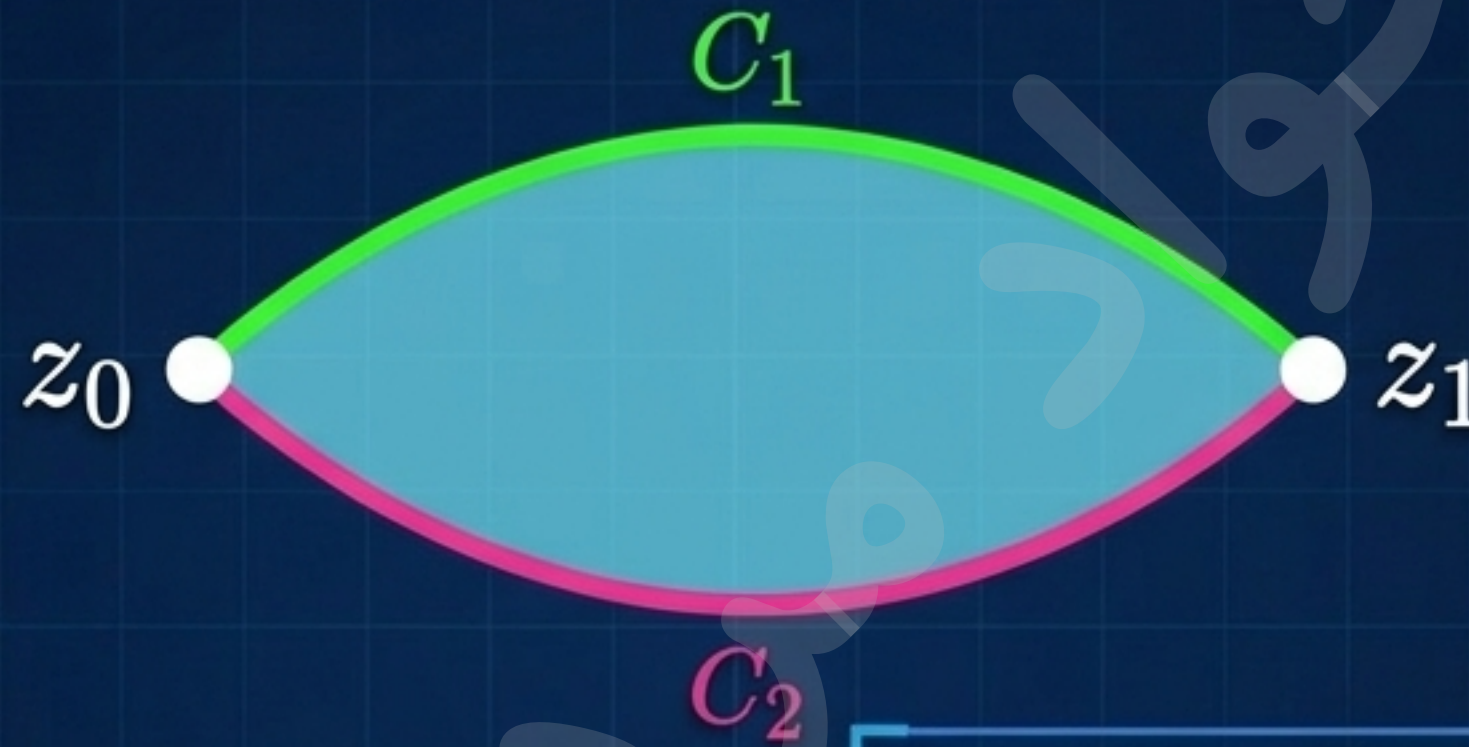
بررسی کوتاه (پاسخ): فقط برای توابع تحلیلی معادلات کوشی-ریمان برقرارند.



استقلال از مسیر

هدف یادگیری: درک اینکه چگونه قضیه کوشی-گورسا منجر به استقلال انتگرال از مسیر می‌شود.

استقلال از مسیر



$$C_1 = C_2$$

۱. مفهوم:

در یک دامنه تحلیلی، اگر بخواهیم انتگرال را بین دو نقطه حساب کنیم، فرقی نمی‌کند کدام مسیر را انتخاب کنیم.

۲. شهود:

چه مسیر صخره‌ای را انتخاب کنید و چه مسیر جنگلی را، تغییر ارتفاع خالص شما برای رسیدن به قله یکسان است.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- دو مسیر متفاوت C_1 و C_2 از z_0 شروع و به z_1 ختم می‌شوند.
- اگر منطقه بین این دو مسیر تحلیلی باشد، انتگرال روی C_1 برابر با C_2 است.
- **هشدار:** خود این انتگرال‌ها لزوماً صفر نیستند، اما با یکدیگر برابرند.

اشتباه رایج: تصور اینکه انتگرال روی هر کانتور باز هم صفر است.

۴. مثال کاربردی: محاسبه انرژی جابجایی بار الکتریکی در یک میدان یکنواخت. مسیر حرکت تأثیری در انرژی مصرفی کل ندارد.

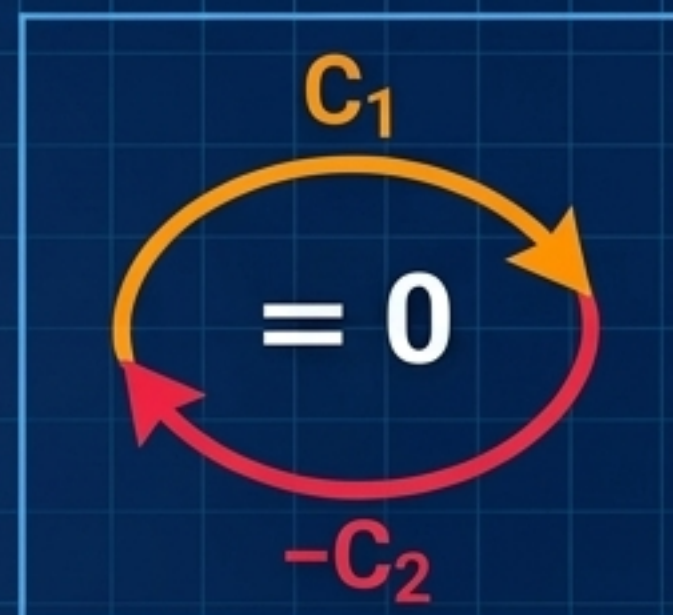
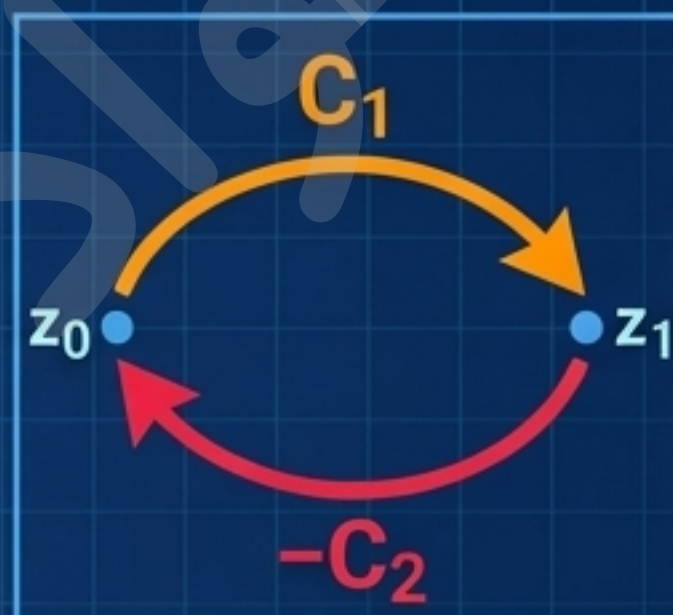
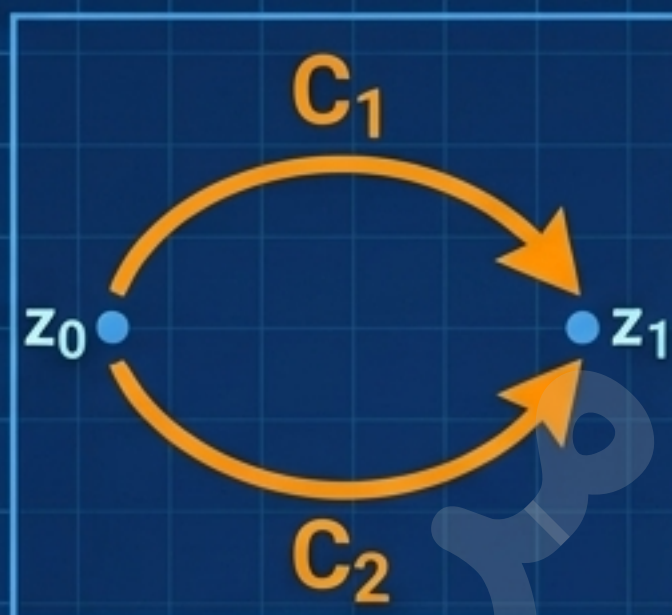
۵. بررسی کوتاه (سؤال): آیا استقلال از مسیر به معنای صفر بودن انتگرال است؟
بررسی کوتاه (پاسخ): خیر، یعنی جواب در هر دو مسیر برابر است.

اشتباه رایج: تصور اینکه انتگرال روی هر کانتور باز هم صفر است.

منطق استقلال از مسیر

هدف یادگیری: فهم ریاضی اینکه چرا استقلال از مسیر نتیجه مستقیم حلقه بسته است.

۱. مفهوم: برابری دو مسیر با استفاده از معکوس کردن جهت یکی از آن‌ها و ساختن یک حلقه بسته اثبات می‌شود.
۲. شهود: رفتن از مسیر A و برگشتن از مسیر معکوس B باید شما را بدون هیچ تغییری به نقطه اول برگرداند.



۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:
 - مسیر C_1 را از z_0 به z_1 طی می‌کنیم.
 - مسیر C_2 را به صورت **برعکس** ($-C_2$) برمی‌گردیم.
 - ترکیب این دو، یک مسیر بسته می‌سازد: $C_{\text{closed}} = C_1 - C_2$
 - طبق کوشی-گورسا: $\int_{C_1} - \int_{C_2} = 0$
 - نتیجه نهایی: $\int_{C_1} = \int_{C_2}$

۴. مثال کاربردی: در فیزیک سیالات، به جای انتگرال‌گیری روی مسیر پر پیچ و خم، یک مسیر خط صاف را جایگزین می‌کنیم.

۵. بررسی کوتاه (سؤال): مسیر $-C_2$ به چه معناست؟
بررسی کوتاه (پاسخ): همان مسیر C_2 است، اما جهت حرکت معکوس شده است.

قضیه اساسی حسابان مختلط

هدف یادگیری: نحوه محاسبه آسان انتگرال‌ها بدون نیاز به پارامترسازی مسیر.

۱. مفهوم:

اگر تابع تحلیلی باشد، انتگرال روی هر مسیر، فقط برابر است با تفاضل مقدار تابع پادمشتق در نقطه پایان و شروع.

۲. شهود:

برای فهمیدن اینکه چقدر قد کشیده‌اید، لازم نیست فرآیند رشد را جمع بزنید؛ فقط قد فعلی را از زمان تولد کم کنید!

۴. مثال کاربردی:

محاسبه انتگرال z^2 از 0 تا z_1 .
پادمشتق $z^3/3$ است. جواب
مستقیماً می‌شود $z_1^3/3 - 0$.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- فرمول کلیدی: $\int f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$
- $F(z)$ تابعی است که مشتق آن برابر $f(z)$ است.
- مسیر کانتور اهمیتی ندارد؛ فقط نقاط ابتدا و انتها مهم هستند.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

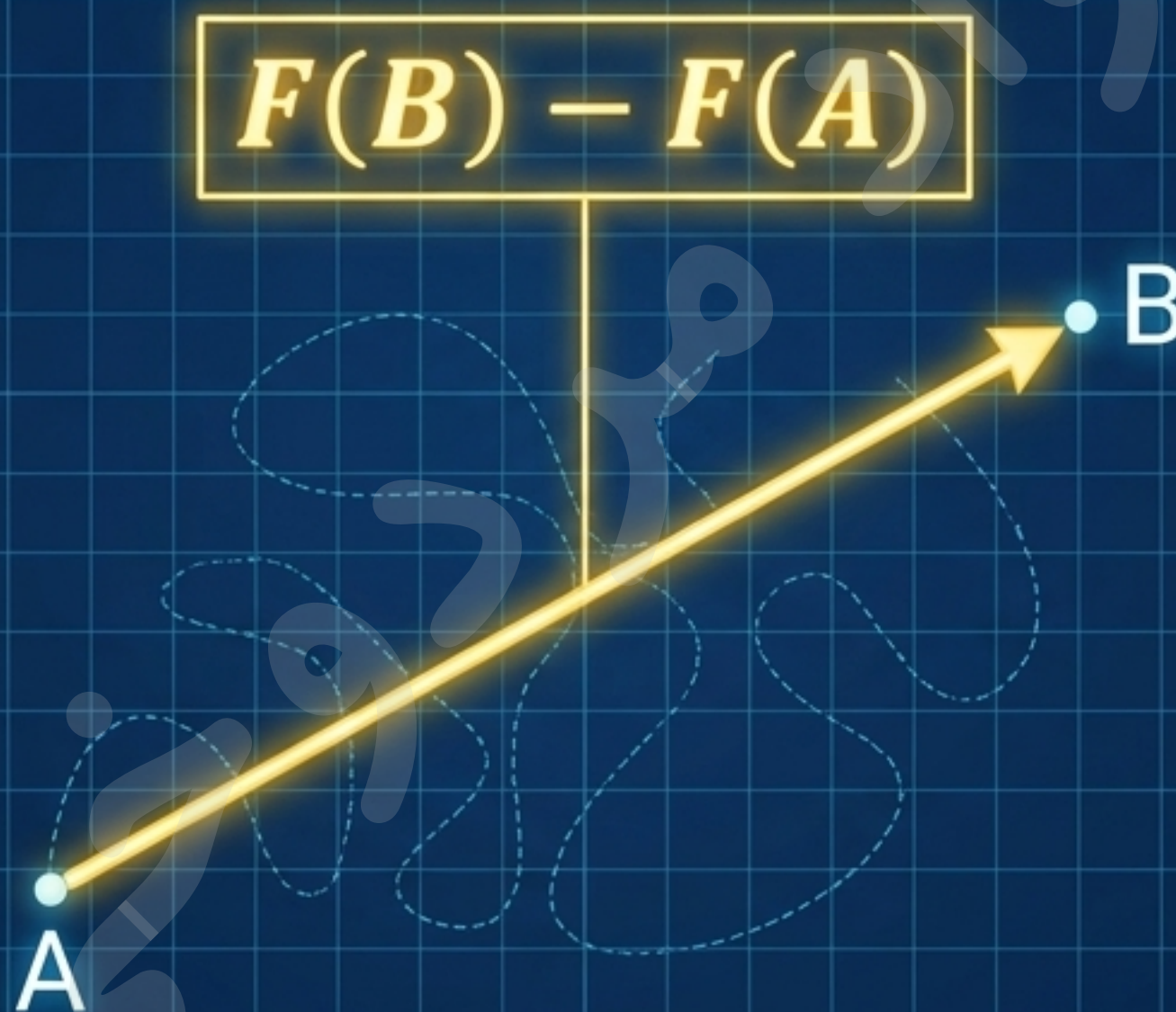
آیا تابع باید در تمام فضا تحلیلی باشد؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

تابع باید حداقل در ناحیه‌ای که مسیر قرار دارد تحلیلی باشد.

اشتباه رایج:

پارامترسازی کانتورهای پیچیده برای توابع تحلیلی ساده.



دیفرانسیل‌های کامل

هدف یادگیری: درک دلیل وجود تابع پادمشتق از منظر معادلات دیفرانسیل.

۱. مفهوم
اجزای درونی انتگرال مختلط دیفرانسیل‌های کامل هستند؛ یعنی مستقیماً از مشتقات جزئی یک تابع مرجع (F) نشأت می‌گیرند.

۲. شهود
قطعات پازل دقیقاً طوری بریده شده‌اند که بدون جای خالی، با هم چفت شده و تابع اصلی را بسازند.

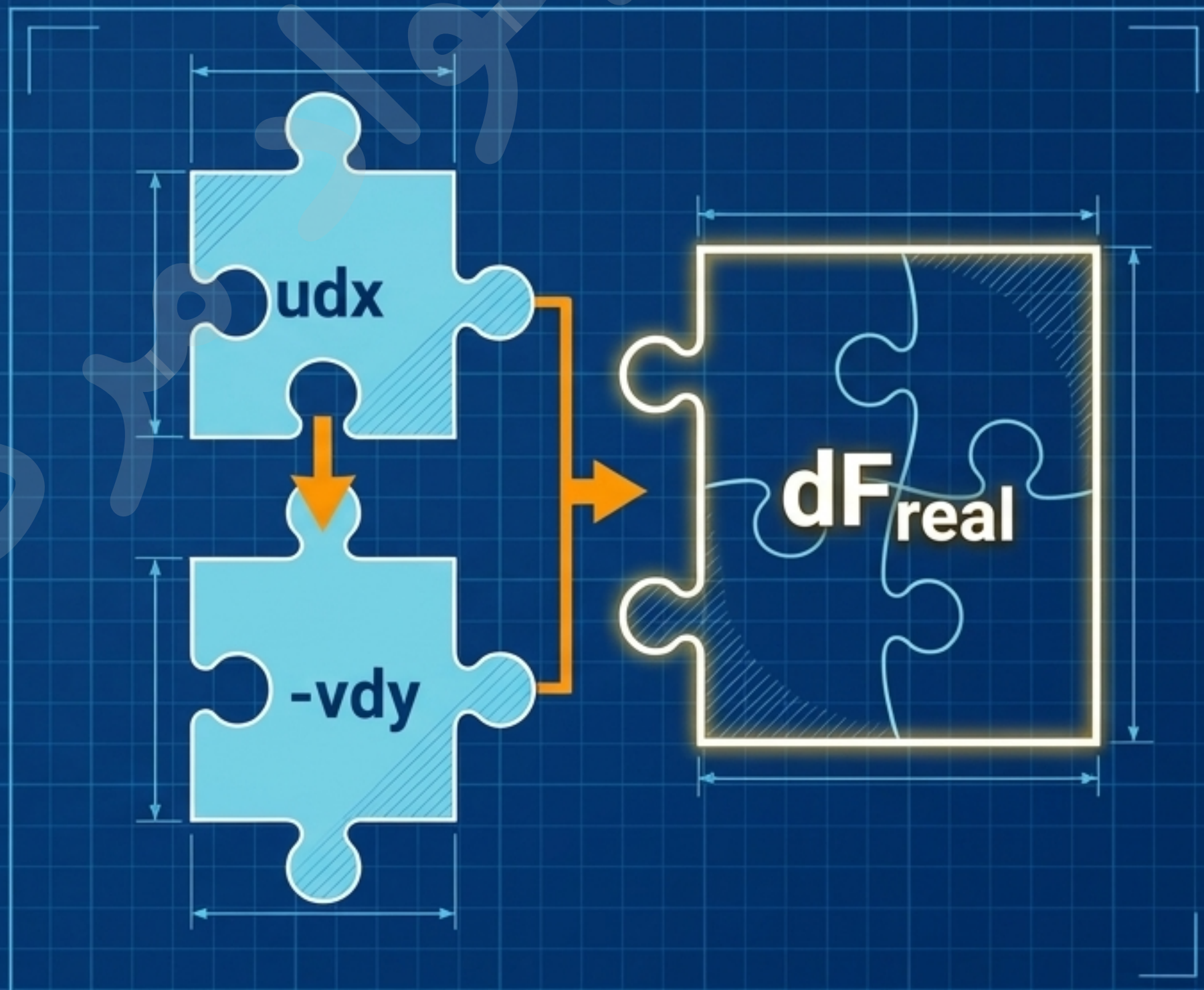
۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:
- وقتی توابع در شرایط کوشی-ریمان صدق می‌کنند، نشان‌دهنده دیفرانسیل کامل هستند.

$$F_{total} = F_{real} + i G_{imag}$$
$$u = \frac{\partial F_{real}}{\partial x} \quad \text{و} \quad v = -\frac{\partial F_{real}}{\partial y}$$

- این مانند ایجاد یک میدان برداری پایستار در فیزیک است.

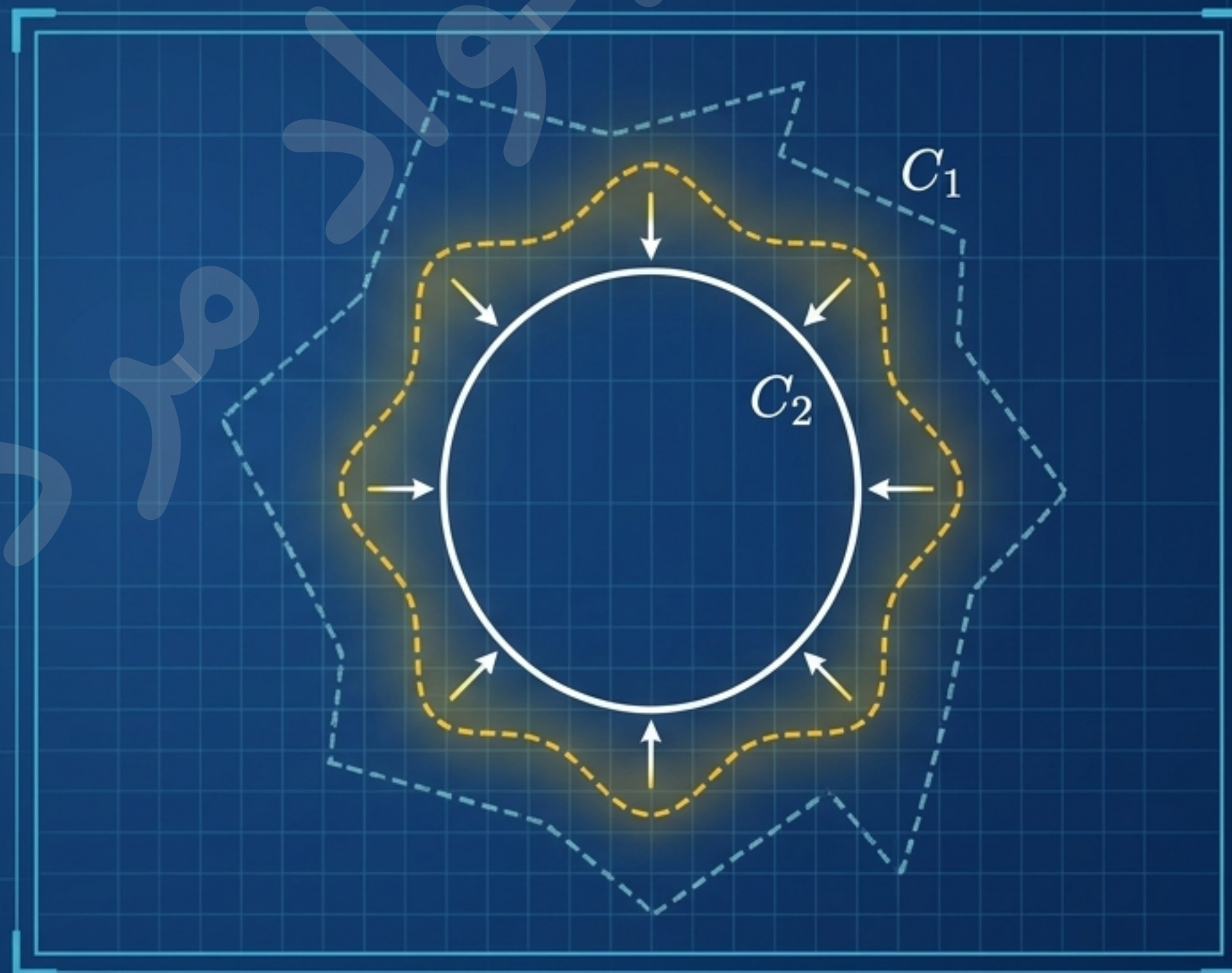
۴. مثال کاربردی
در فیزیک حرارت، گرادیان دما یک دیفرانسیل کامل است و اختلاف دمای دو نقطه همیشه ثابت است.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):
شرط اصلی دیفرانسیل کامل بودن چیست؟
بررسی کوتاه (پاسخ):
صدق کردن اجزای آن‌ها در شرایط کوشی-ریمان.



تغییر شکل کانتور (جراحی)

هدف یادگیری: معرفی ابزار جراحی در صفحه مختلط برای ساده‌سازی انتگرال‌ها.



۱. مفهوم:

می‌توانید کانتور C_1 را به طور پیوسته تغییر شکل دهید تا تبدیل به C_2 شود، بدون تغییر مقدار انتگرال.

۲. شهود:

یک کش پلاستیکی روی میز را تا زمانی که به مانعی برخورد نکند، می‌توانید به هر شکلی جابجا کنید.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- اگر انتگرال‌گیری روی C_1 سخت است، آن را به یک دایره تمیز تغییر شکل می‌دهیم.
- شرط اصلی: تغییر شکل پیوسته باید کاملاً داخل ناحیه تحلیلی انجام شود.
- اگر هر دو کانتور بسته باشند جواب صفر است؛ جذابیت این ابزار در دور زدن نقاط تکین است.

۴. مثال کاربردی:

به جای محاسبه جریان روی مرزهای زاویه‌دار مدار، کانتور را به یک دایره ساده مماس تغییر می‌دهند.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

آیا طول کانتور جدید باید مساوی قبلی باشد؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

خیر، طول تغییر می‌کند اما مقدار انتگرال ثابت می‌ماند.

رویارویی با نقاط تکین (اژدها)

هدف یادگیری: شناخت محدودیت‌های قضیه کوشی-گورسا هنگام وجود نقاط غیرتحلیلی.

1 مفهوم:

نقاط تکین نقاطی هستند که تابع در آن‌ها منفجر می‌شود (مثل مخرج صفر). نمی‌توانید کانتور را از روی آن‌ها عبور دهید.

2 شهود:

نقاط تکین مانند گرداب‌های سهمگین یا سیاهچاله‌ها هستند. نقشه شما هرگز نباید آن‌ها را لمس کند.

3 نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- در نقاط تکین قضیه کوشی-گورسا مستقیماً کار نمی‌کند.
- انتگرال حلقه بسته‌ای که یک تکینگی را احاطه کند، دیگر صفر نیست.
- با این حال، مناطق بین کانتورهای دور این نقاط، همچنان امن هستند.

4 مثال کاربردی:

در مطالعه سیاهچاله‌ها، افق رویداد یک تکینگی است. کانتور باید دور آن بچرخد نه از مرکز.

5 بررسی کوتاه (سؤال):

اگر کانتور نقطه‌ای تعریف نشده را احاطه کند، جواب صفر است؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

خیر، کوشی-گورسا فقط زمانی صفر است که تمام نقاط داخل منحنی تحلیلی باشند.



جراحی دور نقاط تکین

هدف یادگیری: یادگیری ترفند ترکیب کانتورها برای دور زدن اثر نقاط تکین.

۱. مفهوم: می‌توانیم کانتور $C1$ را به کانتور $C2$ تغییر شکل دهیم، به شرطی که بین این دو کانتور تحلیلی باشد.

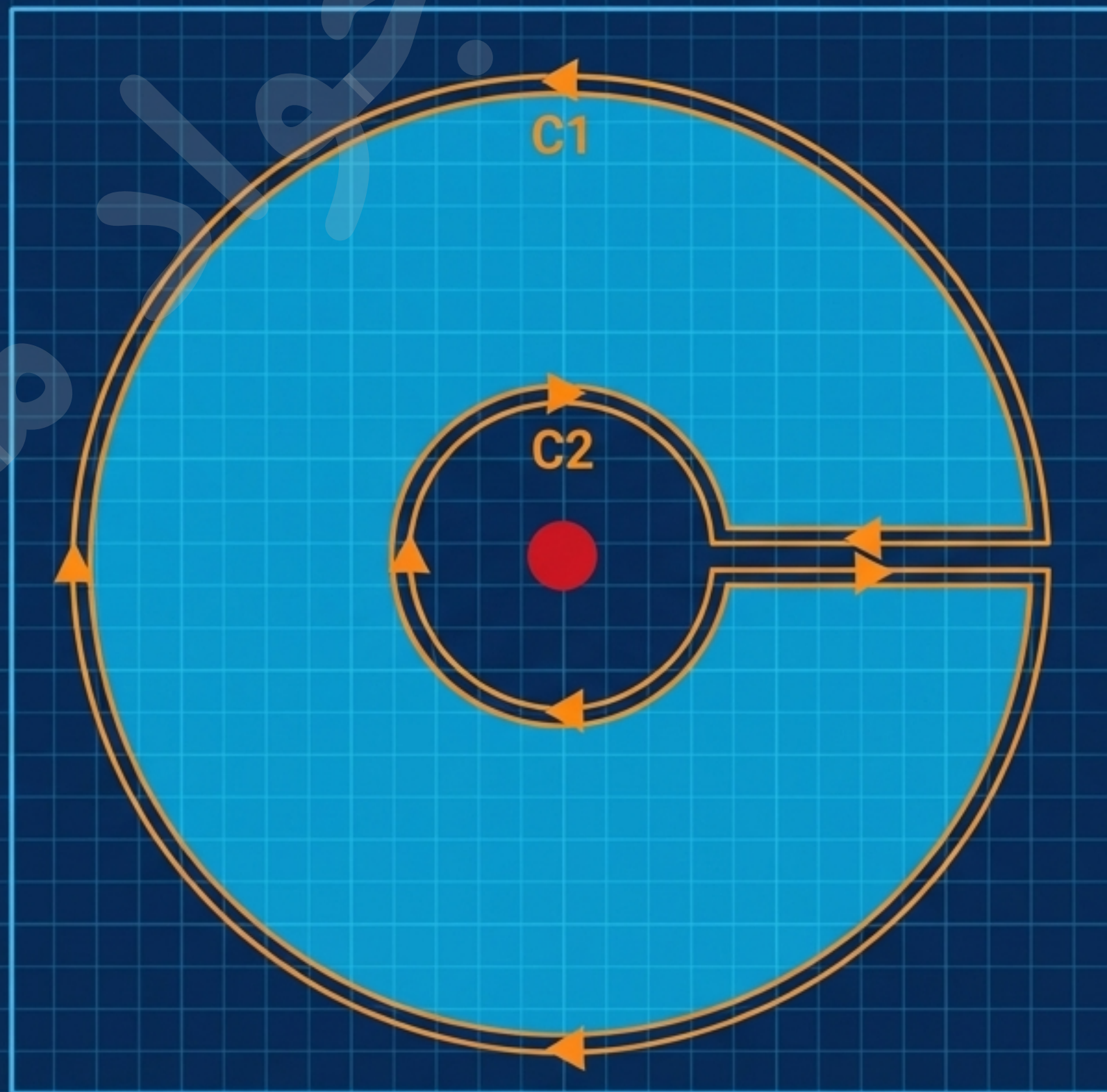
۲. شهود: چه یک مایل دورتر از آتشفشان حلقه بزنید چه ده مایل، تا زمانی که بین دو مسیر خطری نباشد، انرژی یکسانی می‌برد.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- جراحی: کانتور بیرونی ($C1$) را برش داده و با یک کانال باریک به داخلی ($C2$) وصل می‌کنیم.
- این شکل شبیه یک کلید سوراخ‌دار می‌شود که نقطه تکین در فضای وسط آن جا مانده است.
- وقتی پهنای کانال به صفر میل کند، مسیر رفت و برگشت خنثی شده:
 $\int C1 = \int C2$

۴. مثال کاربردی: برای محاسبه تشعشعات یک منبع نقطه‌ای، مهندسان کانتور را تا بی‌نهایت دور می‌کنند تا ریاضیات راحت‌تر شود.

۵. بررسی کوتاه (سؤال): آیا انتگرال روی $C1$ و $C2$ حول تکینگی صفر است؟
(پاسخ): احتمالاً صفر نیست، اما با یکدیگر برابرند.



$$\left| \int f(z) dz \right| \leq M \times L$$

M (حداکثر مقدار)



کران ML

هدف یادگیری: معرفی ساده‌ترین ابزار برای تخمین حداکثر مقدار یک انتگرال.

۱. مفهوم: اندازه انتگرال هرگز نمی‌تواند از حاصل ضرب بیشترین مقدار تابع (M) در طول مسیر (L) بزرگتر باشد.

۲. شهود: اگر سرعت شما هرگز از ۵ تجاوز نکند و ۲ ساعت راه بروید، مسافت طی شده حداکثر ۱۰ است.

۳. نحوه کارکرد / نکات کلیدی:

- فرمول کلیدی: $\left| \int f(z) dz \right| \leq M \times L$
- مقدار M: کران بالای اندازه تابع روی مسیر است.
- مقدار L: طول فیزیکی مسیر منحنی است.
- این قضیه برای هر مسیری صادق است.

۴. مثال کاربردی: روی دایره‌ای به طول 4π ، اگر اندازه تابع از ۳ بیشتر نشود، اندازه انتگرال قطعا کوچکتر از 12π است.

۵. بررسی کوتاه (سؤال):

اگر تابع روی مسیری به طول ۵، ثابت و برابر ۲ باشد، کران چیست؟

بررسی کوتاه (پاسخ):

$$M \times L = 2 \times 5 = 10$$

استفاده از کران ML در بی‌نهایت

هدف یادگیری: کاربرد حرفه‌ای کران ML برای حذف انتگرال‌های پیچیده.

۱. **مفهوم:** می‌توانیم کانتورها را تا شعاع بی‌نهایت بزرگ کنیم. اگر تابع سریع‌تر صفر شود، مقدار کل انتگرال کشته می‌شود.

۲. **شهود:** یک لکه جوهر در آب پخش می‌شود. در دایره‌های بی‌نهایت بزرگ، غلظت چنان صفر است که جوهر روی محیط ناچیز می‌شود.

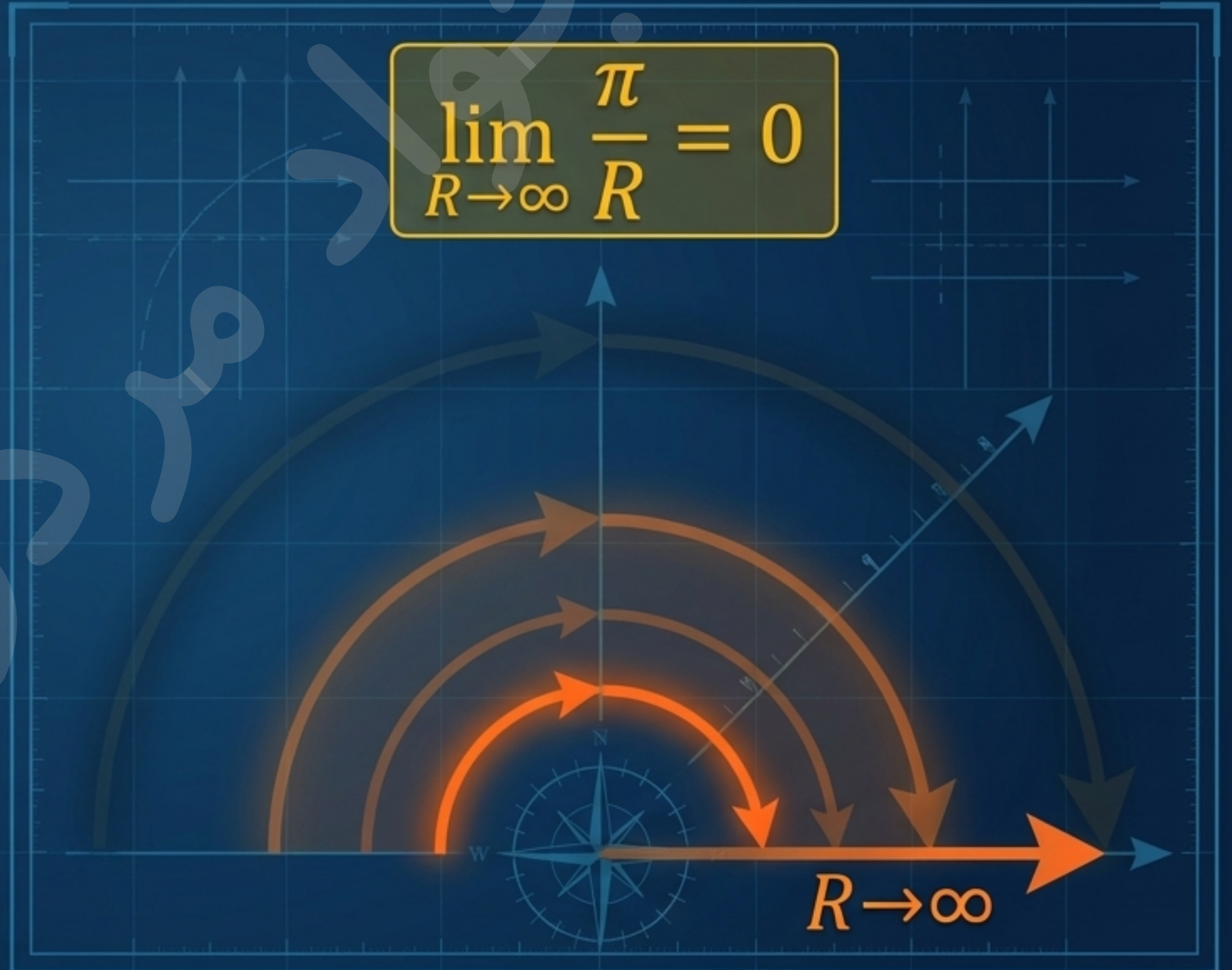
۳. **نحوه کارکرد / نکات کلیدی:**

- یک نیم‌دایره بزرگ به شعاع R رسم می‌کنیم. $L = \pi R$
- اگر تابع شبیه $\frac{1}{R^2}$ کوچک شود $(M = \frac{1}{R^2})$.
- کران انتگرال می‌شود: $(\frac{1}{R^2}) \times (\pi R) = \frac{\pi}{R}$
- با حد گرفتن، کران به صفر میل می‌کند.

۴. **مثال کاربردی:** در لاپلاس معکوس، با کران ML ثابت می‌کنند انتگرال نیم‌دایره در بی‌نهایت صفر است.

۵. **بررسی کوتاه (سؤال):** برای صفر شدن، تابع باید چگونه رفتار کند؟
(پاسخ): باید سریع‌تر از بزرگ شدن طول کانتور به صفر میل کند.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{R} = 0$$



خلاصه و پیوند مفاهیم

تمام قضایایی که آموختیم قطعات یک نقشه واحد برای ساده کردن حل مسائل فیزیکی پیچیده در صفحه مختلط هستند.

• تحلیلی بودن (Analytic):

پیش شرط تمام ابزارهای ما
(معادلات کوشی-ریمان).

• قضیه کوشی-گورسا:

اگر دامنه کاملاً تحلیلی باشد
 $\Leftrightarrow$ انتگرال حلقه صفر است.

• استقلال از مسیر:

نتیجه مستقیم حلقه صفر
 $\Leftrightarrow$ فقط ابتدا و انتها مهم است.

• تغییر شکل (Surgery):

دور زدن اژدهاها و نقاط تکین
 $\Leftrightarrow$ انتگرال کانتورها برابر است.

• کران ML:

ابزار فرار به بی نهایت برای
خنثی کردن انتگرال های مزاحم.

مثال جامع:

در فیزیک سیالات، برای پیدا کردن فشار حول استوانه، از
کوشی-گورسا برای پایدگی، از جراحی برای ساده کردن مرز،
و از کران ML برای نادیده گرفتن بی نهایت استفاده می کنیم.



ارزیابی نهایی و گام‌های بعدی

آزمون تسلط پیش از ورود مستقل به صفحه مختلط:

پاسخنامه سریع:

(۱) $dx+idy$

(۲) صفر

(۵) $\int_{C1} = \int_{C2}$

(۷) غیرمجاز است

(۹) $|\int| \leq ML$

(۳) گرین

(۴) کوشی-ریمان

(۶) $F(z1)-F(z0)$

(۸) جراحی کانتور

(۱۰) حذف بخش‌های سخت.

۱. ☐ معنی dz چیست؟

۲. ☐ انتگرال z^3 دور یک مربع بسته چیست؟

۳. ☐ قضیه کوشی-گورسا از کدام قضیه کمک می‌گیرد؟

۴. ☐ شرط صفر شدن در قضیه گرین چیست؟

۵. ☐ نتیجه $\oint_{C1} - \oint_{C2} = 0$ چیست؟

۶. فرمول قضیه اساسی حسابان مختلط؟

۷. اگر کانتور روی نقطه تکین قرار گیرد؟

۸. چگونه کانتورها را دور نقطه تکین برابر قرار دهیم؟

۹. فرمول کران ML چیست؟

۱۰. چرا حد کانتور را در بی‌نهایت می‌گیریم؟



ایستگاه بعدی: قضیه مانده‌ها (Residue Theorem)