

سیستم‌های دینامیکی و معادلات دیفرانسیل

نقشه‌راه مهندسی برای درک تغییرات جهان (از کاغذ تا کامپیوتر)

پیش‌نیاز: آشنایی پایه با حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)

موضوع: مدل‌سازی نحوه تغییر سیستم‌ها در طول زمان.

چرا اهمیت دارد: از فرود آوردن موشک‌ها تا درک متابولیسم مغز، همه چیز در این جهان با معادلات دیفرانسیل کار می‌کند.



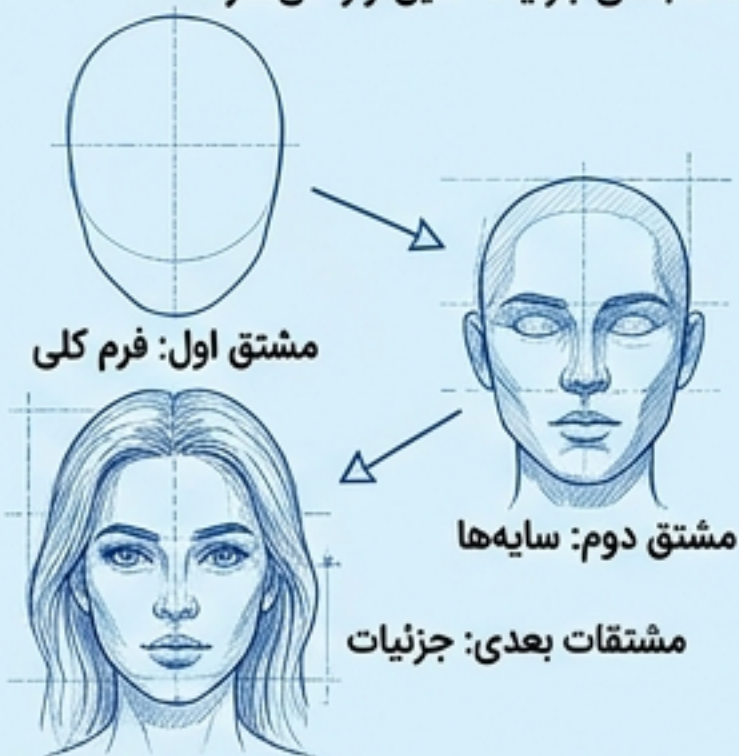
اشتباه رایج: تصور اینکه این مباحث فقط تئوری‌های خشک هستند. حقیقت این است که این معادلات، موتور محرک یادگیری ماشین و شبیه‌سازی‌های مدرن امروزی‌اند.

بسط تیلور (Taylor Series)

روشی برای تقریب زدن توابع پیچیده با استفاده از مشتقات آن‌ها.

شهود:

تصور کنید می‌خواهید چهره یک شخص را نقاشی کنید. مشتق اول فرم کلی صورت است، مشتق دوم سایه‌ها، و مشتقات بعدی جزئیات دقیق‌تر را می‌سازند.

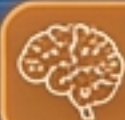


۱. نقطه شروع (وضعیت فعلی) را مشخص کنید.

۲. نرخ تغییرات (مشتق اول) را محاسبه کنید.

۳. انحنای (مشتق دوم) را برای دقت بیشتر اضافه کنید.

Anatomy of an Equation



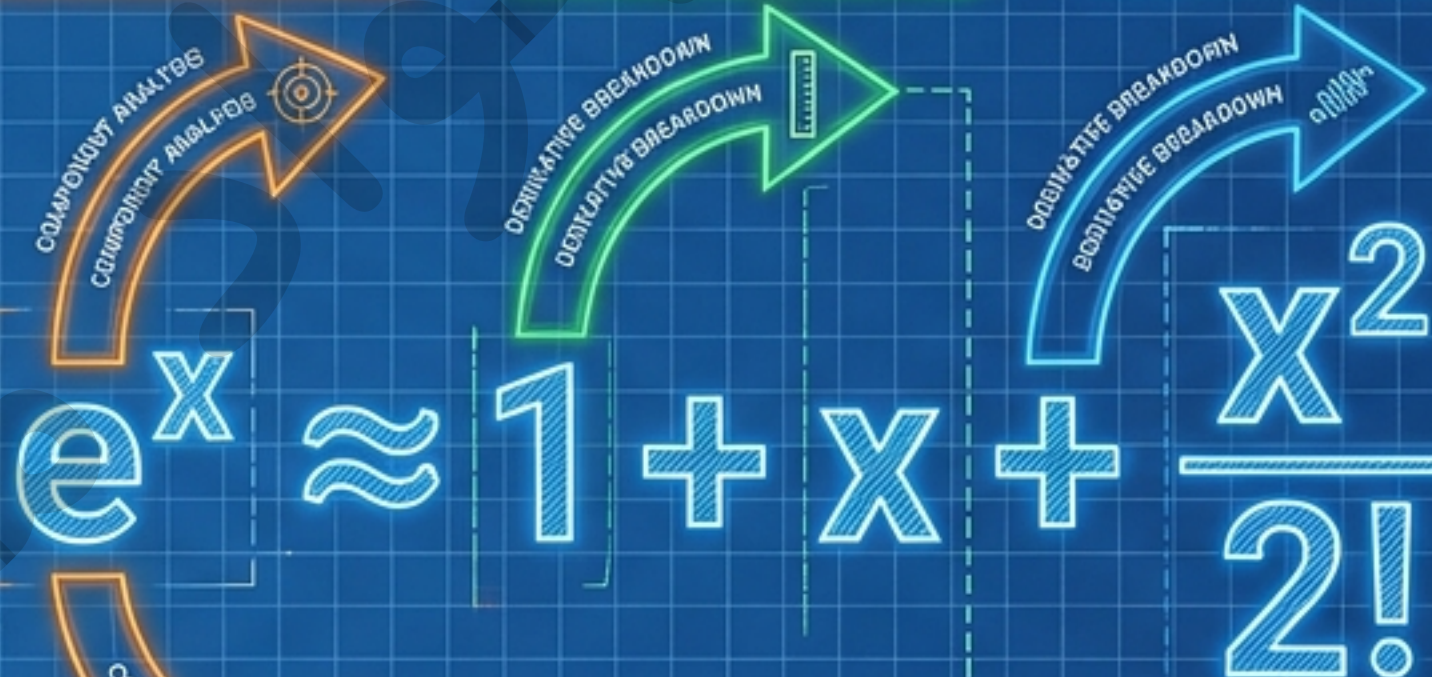
تابع نمایی (هدف/ناشناخته)



تقریب خطی اولیه (شناخته شده)



تصحیح انحنای (دقت بیشتر)



اگر $x=0.1$ باشد، $e^{0.1} \approx 1 + 0.1 = 1.1$

چرا از بسط تیلور استفاده می‌کنیم؟

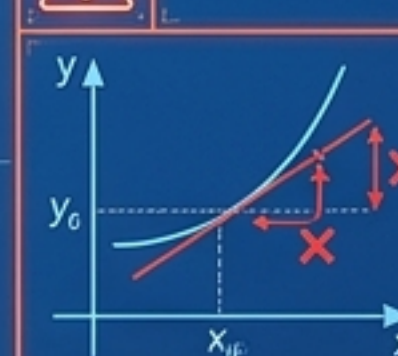
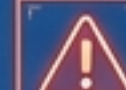
غلط: برای پیدا کردن مساحت زیر نمودار.



صحیح: برای استخراج راه‌حل‌های ساده از روی مشتقات.



اشتباه رایج:



اشتباه گرفتن مشتق (شیب لحظه‌ای) با خود مقدار تابع.



معادله دیفرانسیل معمولی (ODE)

قاعده‌ای که وضعیت در حال تغییر یک سیستم را به وضعیت فعلی آن مرتبط می‌کند.

شهود عقربه‌های ماشین: معادله دیفرانسیل می‌گوید، سرعت سنج (سرعت تغییر) چگونه با کیلومترشمار (مسافت طی شده) ارتباط دارد.

شهود عقربه‌های ماشین
(سرعت تغییر)

v

جرم جسم
(ثابت)

F
 m

شتاب / تغییرات سرعت
(نرخ ناشناخته)

v

نیروی وارد شده
(ورودی معلوم)

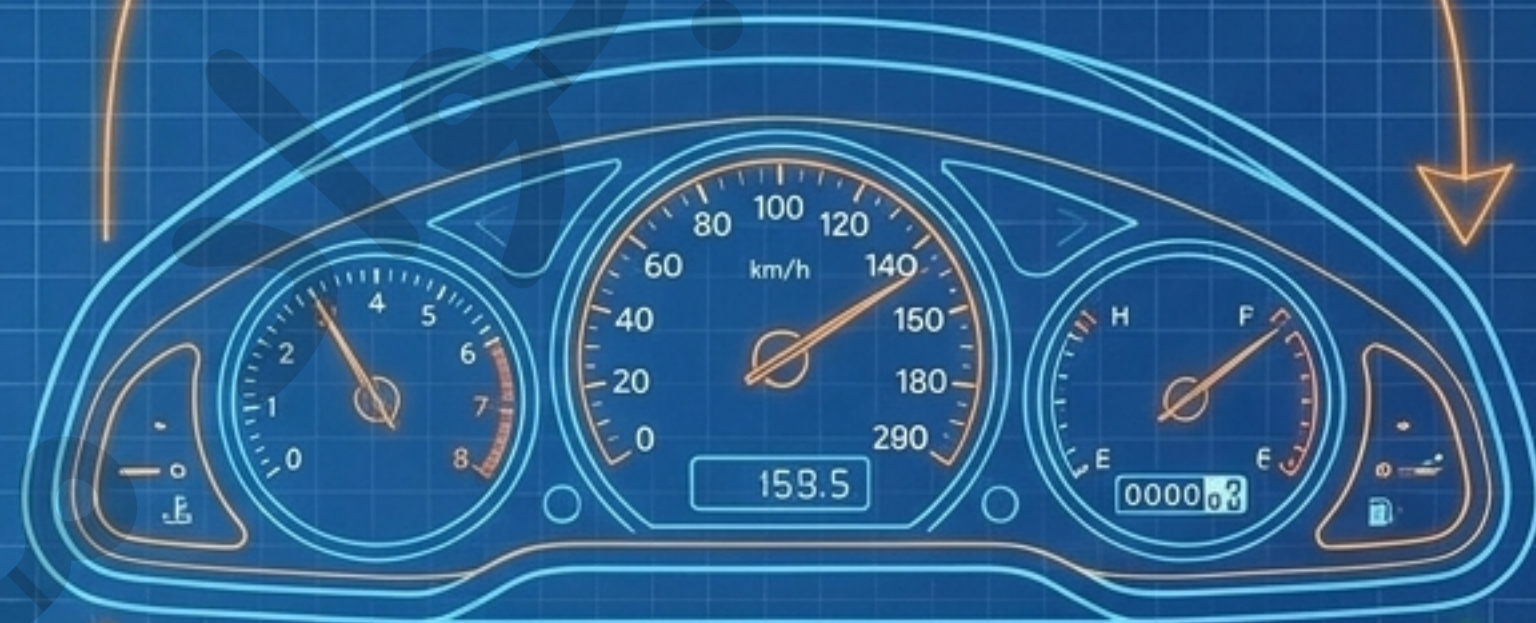
قانون دوم نیوتن. اگر نیرو ۱۰ و جرم ۲ باشد، شتاب ۵ است.

۱. سیستم یک حالت اولیه دارد.

۲. یک قانون تعیین می‌کند قدم بعدی چگونه برداشته شود.

۳. زمان به جلو می‌رود و وضعیت آپدیت می‌شود.

۳. زمان به جلو می‌رود و وضعیت آپدیت می‌شود.



۳. زمان به جلو می‌رود و وضعیت آپدیت می‌شود.



در یک ODE چه چیزی را محاسبه می‌کنیم؟

صحیح: نرخ تغییرات متغیر در طول زمان.

اشتباه رایج: فکر کردن به معادله دیفرانسیل به عنوان یک عدد ثابت. این یک قانون حرکت است، نه یک عدد.



متغیر حالت (State Variable) و زمان

متغیر حالت (x) کمیتی است که آن را ردیابی می‌کنیم و $\dot{x}$ (ایکس دات) نماد نرخ تغییرات آن است.

شهود:

x مانند عکس فوری از وضعیت یک بازی در یک لحظه خاص است.
 $\dot{x}$ جهت و سرعت حرکت در فریم بعدی است.



عکس فوری



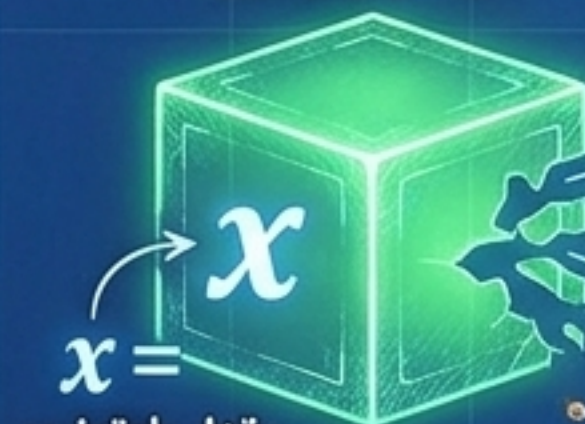
جهت و سرعت



مثال عملی: واپاشی رادیواکتیو



بلوک پلوتونیوم



مقدار پلوتونیوم



واپاشی



متغیر x مقدار پلوتونیوم است و $\dot{x}$ سرعت تبدیل شدن آن.

تشریح معادله (Equation Anatomy)

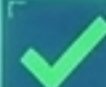
نماد خلاصه
(Shorthand)

تغییرات بسیار کوچک حالت
(Infinitesimal Change in State)

$$\dot{x} = \left[\frac{dx}{dt} \right]$$

دقیقاً مساوی

تغییرات بسیار کوچک زمان
(Infinitesimal Change in Time)



Mini Check:

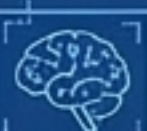
نماد $\dot{x}$ به چه معناست؟

صحیح: سرعت تغییر متغیر در واحد زمان.

مثال عملی: واپاشی رادیواکتیو ⚠

صحیح: مرک رایج: واپاشی رادیواکتیو

اشتباه رایج: فراموش کردن اینکه x یک عدد تنها نیست، بلکه یک تابع از زمان $x(t)$ است.



معادلات دیفرانسیل خطی یک بعدی

وضعیتی که سرعت تغییر مستقیماً متناسب با مقدار فعلی سیستم است.

شهود:

سود بانکی مرکب. هرچه پول بیشتری داشته باشید، سود بیشتری دریافت می‌کنید، که باعث می‌شود پولتان باز هم سریع‌تر رشد کند.

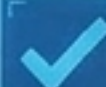
$$\dot{x} = ax$$

سرعت رشد جمعیت
(نرخ)

نرخ زاد و ولد
(ثابت)

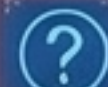
جمعیت فعلی
(وضعیت)

اگر $a=0.1$ و ۱۰۰ خرگوش داشته باشیم، سرعت رشد $\dot{x}=10$ خرگوش در روز است.



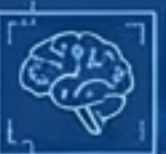
Mini Check:

اگر a منفی باشد چه می‌شود؟
سیستم دچار زوال (Decay) می‌شود،
مثل سرد شدن چای.



اشتباه رایج:

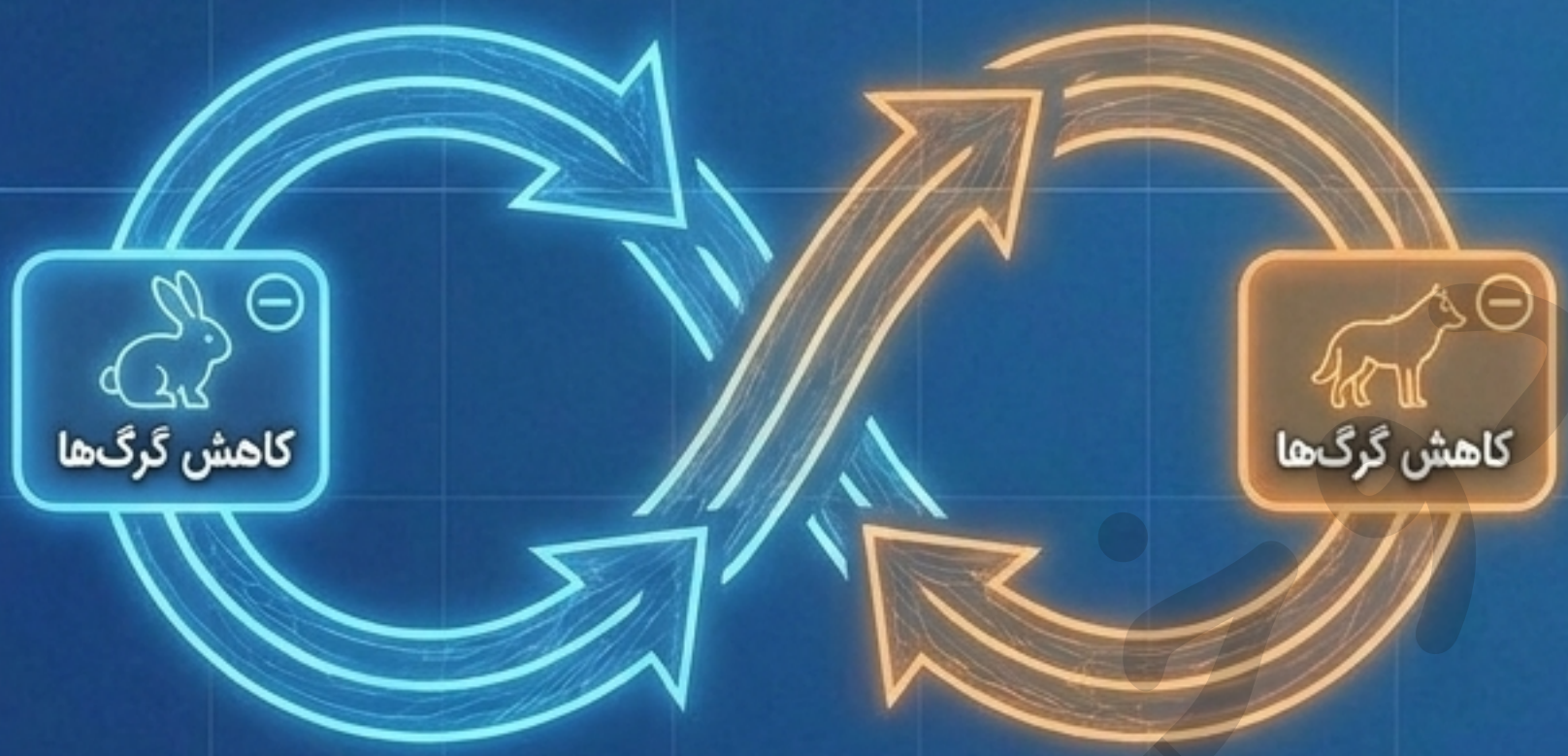
اشتباه: فرض اینکه رشد خطی (Linear ODE) به معنای نمودار خطی مستقیم است. این معادله یک نمودار نمایی (Exponential) تولید می‌کند!



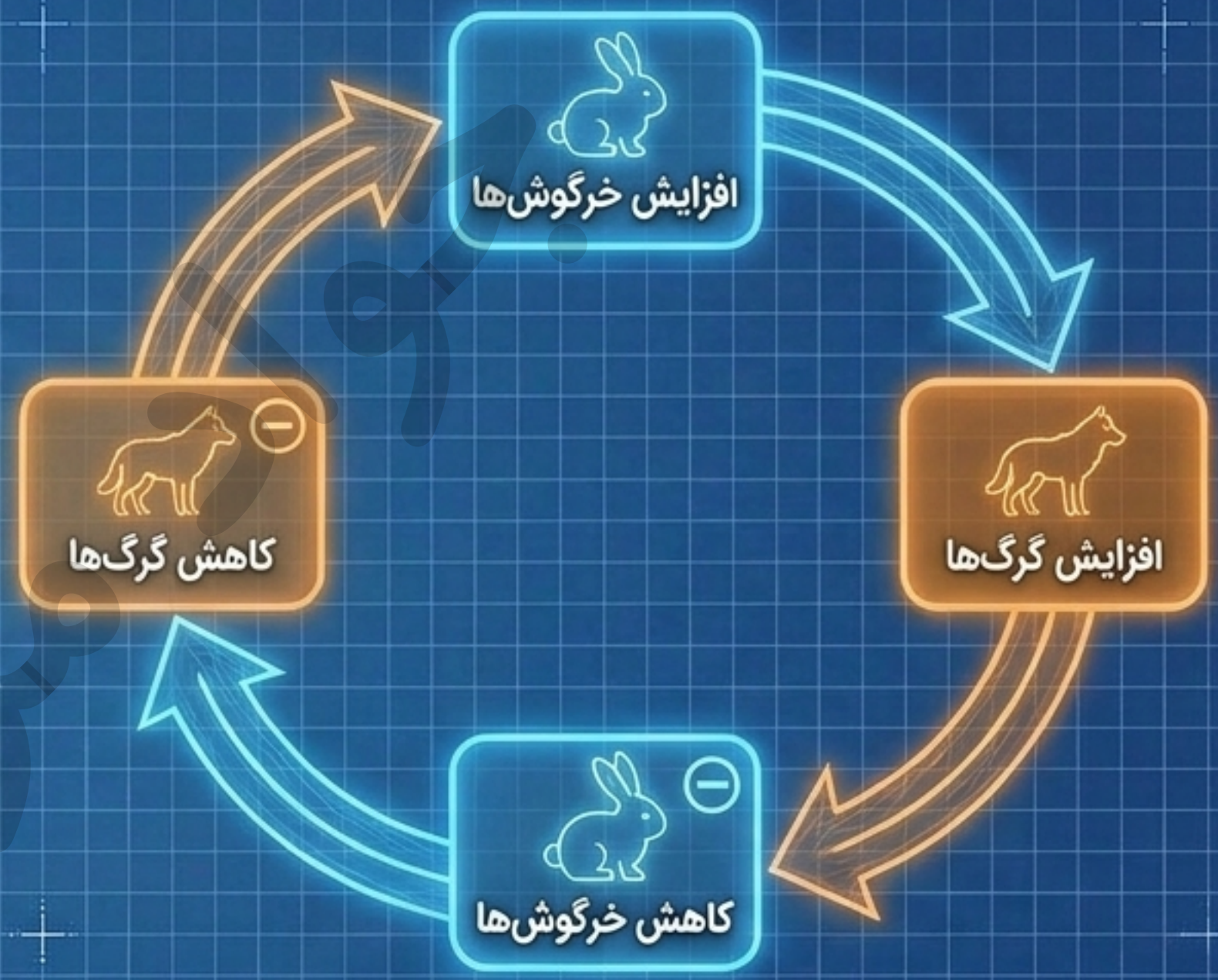
سیستم‌های معادلات دیفرانسیل (Systems of ODEs)

چندین متغیر حالت که به طور همزمان روی یکدیگر تأثیر می‌گذارند.

شهود:
چرخه طبیعت. افزایش خرگوش‌ها به گرگ‌ها غذای بیشتری می‌دهد، اما گرگ‌های بیشتر باعث کاهش سریع‌تر خرگوش‌ها می‌شوند.



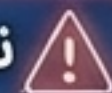
چرا سیستم؟ چون معادلات به هم گره خورده‌اند (Coupled) و نمی‌توان یکی را بدون دیگری حل کرد.



اشتباه رایج:

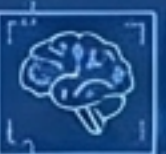


اشتباه رایج: تلاش برای حل کرمعادلات به صورت جداگانه. در این سیستم‌ها، باید همه متغیرها را با هم و همزمان تحلیل کنید.



نحوه کارکرد:

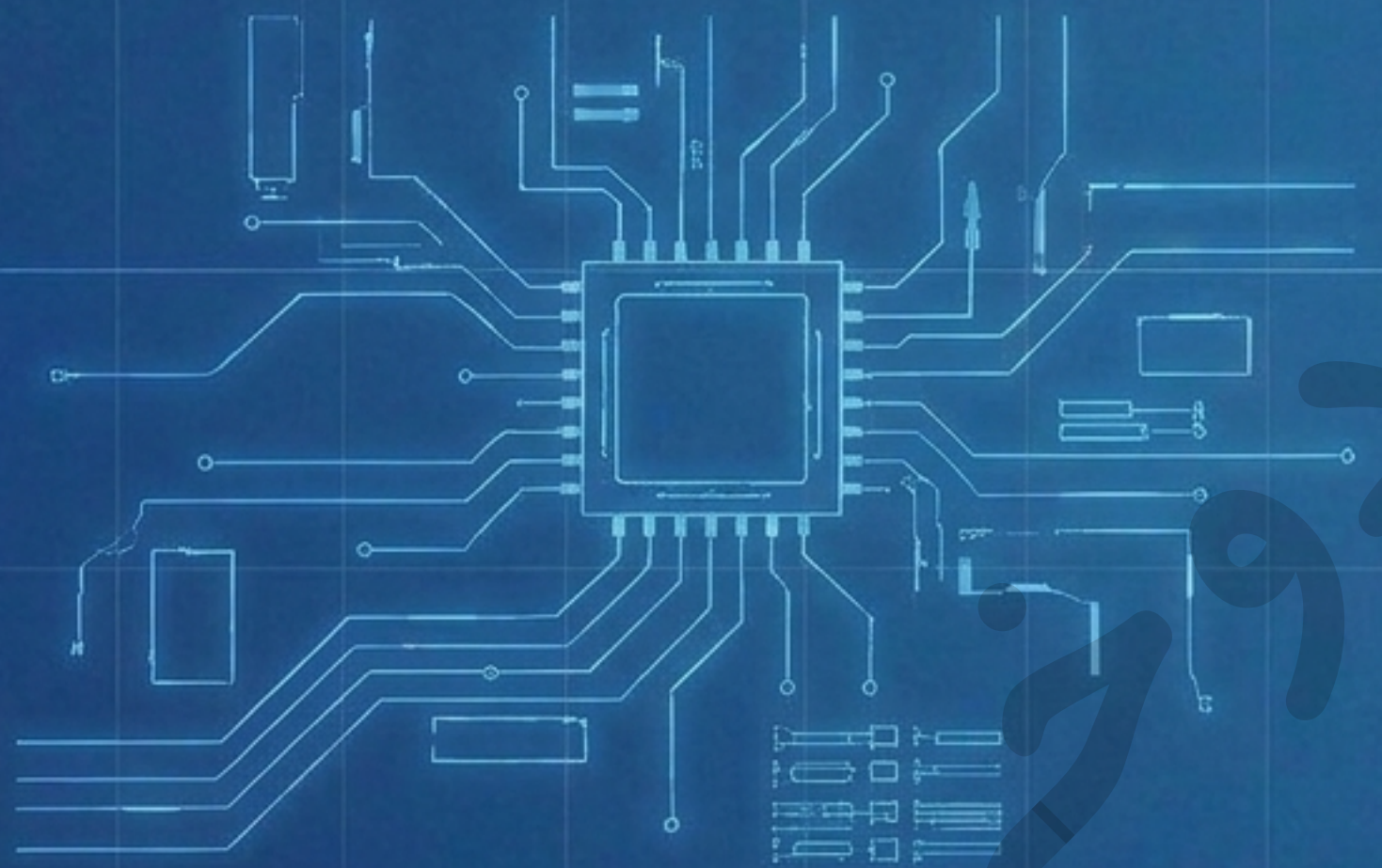
- متغیرهای متعدد در یک بردار گروه‌بندی می‌شوند.
- معادله هر متغیر شامل متغیرهای دیگر است.
- تغییر یک متغیر، کل سیستم را به حرکت درمی‌آورد.



نمایش ماتریسی (Matrix Representation)

استفاده از ماتریس‌ها برای سازماندهی و مدیریت سیستم‌های شامل چندین معادله دیفرانسیل.

شهود:
ماتریس مانند یک فایل اکسل فشرده است که تمام روابط پیچیده و درهم‌تنیده بین متغیرها را ذخیره می‌کند.



مثال عملی: شبکه‌ای از فنرها در شاسی خودرو. ماتریس A نشان می‌دهد هر فنر چقدر روی بقیه فشار می‌آورد.

$$\dot{x} = Ax$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}^T$$

بردار سرعت
متغیرها

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب تعاملات

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T$$

بردار حالت فعلی



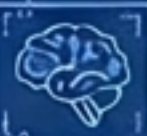
Mini Check:

درون ماتریس A چیست؟
قوانینی که نشان می‌دهند
متغیرها چگونه روی هم اثر
می‌گذارند.



اشتباه رایج: !

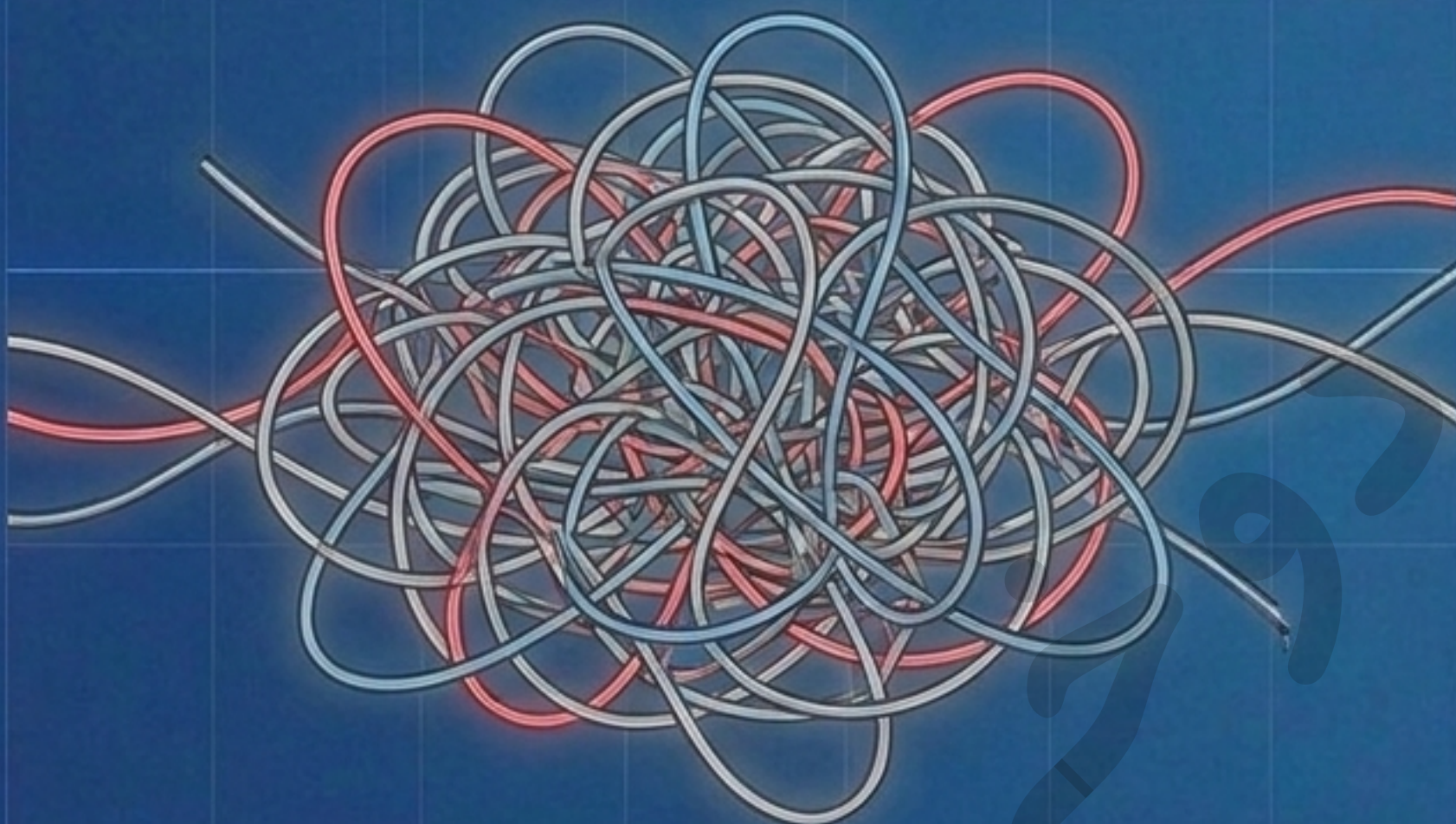
اشتباه رایج: فراموش کردن تفاوت ضخامت نمادها.
x (نازک) یک عدد است، x (پررنگ) یک لیست از اعداد است!



نقش جبر خطی در درک سیستم‌ها

زبان ریاضی برای درک، دستکاری و باز کردن گرهی معادلات دیفرانسیل چندبُعدی.

حل کردن معادلات گره‌خورده (Coupled) تقریباً روی کاغذ غیرممکن است.



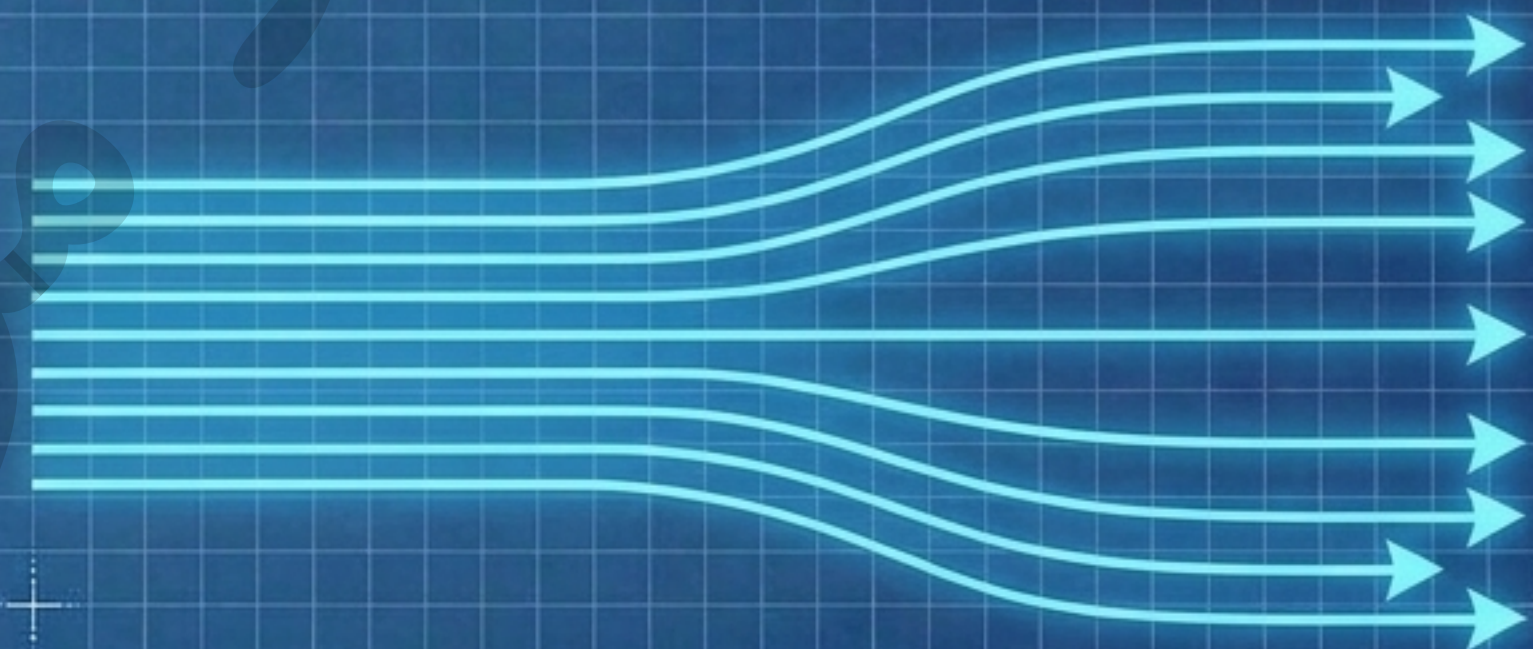
مثال عملی: پیدا کردن اینکه کدام متغیرها در یک موتور جت روی هم تأثیر می‌گذارند برای جلوگیری از انفجار.

نقش جبر خطی در درک سیستم‌ها

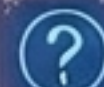
زبان ریاضی برای درک، دستکاری و باز کردن گرهی معادلات دیفرانسیل چندبُعدی.

با استفاده از جبر خطی

عینک‌های سه‌بعدی ریاضی: ماتریس‌ها را دستکاری می‌کنیم تا معادلات از هم مستقل شوند (Decoupled).

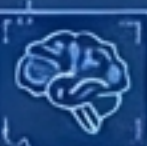


آیا جبر خطی و معادلات جدا هستند؟ **خیر**، جبر خطی ابزار اصلی برای حل معادلات دیفرانسیل است.



اشتباه رایج:

اشتباه رایج: یادگیری جبر خطی فقط به عنوان محاسبات با جدول‌ها. جبر خطی در واقع هندسه تغییر شکل دادن فضا است.

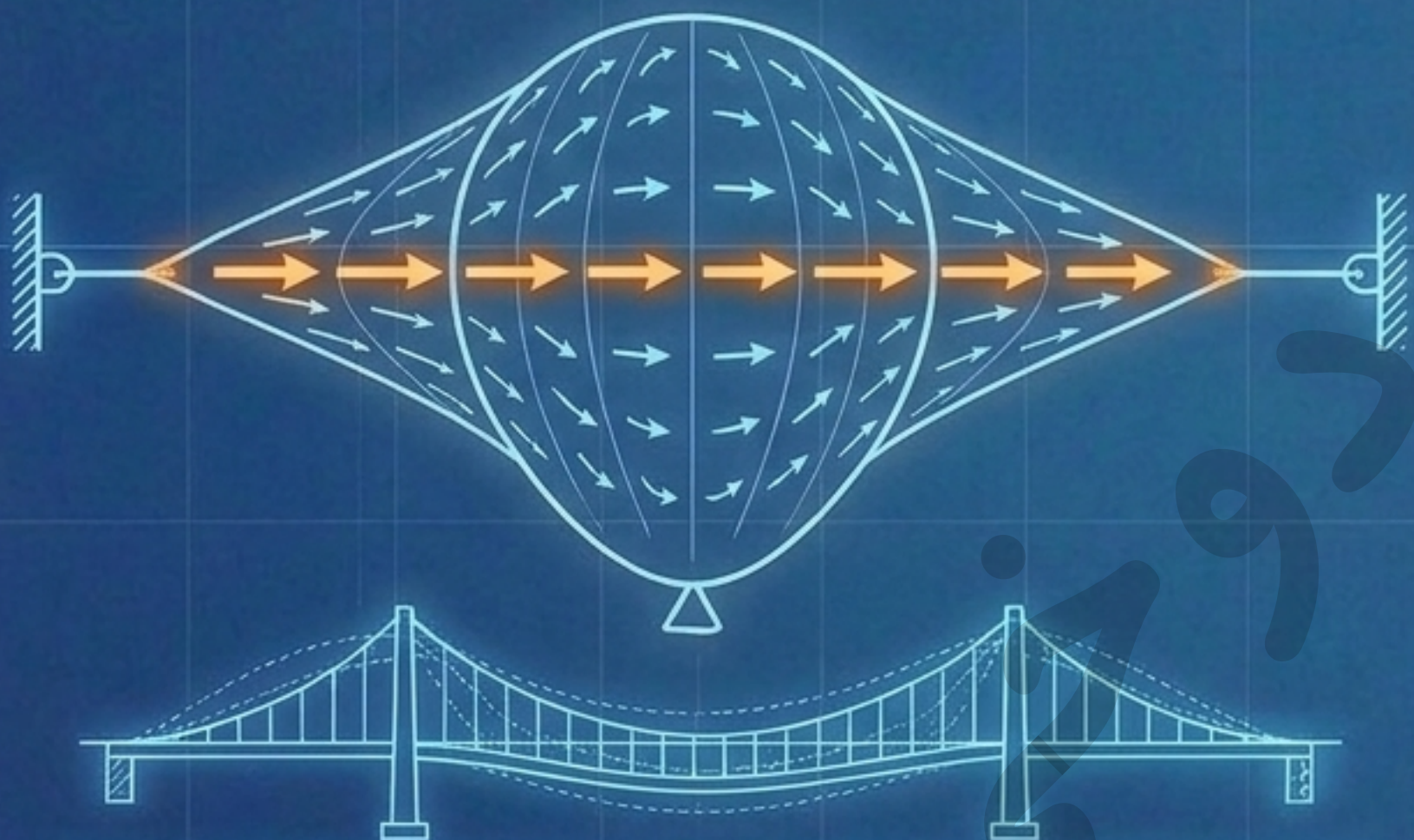


مقادیر و بردارهای ویژه (Eigenvalues & Eigenvectors)

بردارهای خاصی که وقتی ماتریس روی آن‌ها عمل می‌کند، تغییر جهت نمی‌دهند و فقط کشیده یا فشرده می‌شوند.

شهود:

اگر بادکنکی را بکشید، بیشتر فلش‌های روی آن تغییر جهت اما خطوطی که دقیقاً در راستای کشش هستند فقط بلندتر می‌شوند. آن خطوط بردارهای ویژه هستند.



مثال عملی: پیدا کردن فرکانس ارتعاش یک پل. بردارهای ویژه حالت‌های نوسان و مقادیر ویژه فرکانس آن‌ها هستند.

ماتریس تبدیل
(عملگر)

مقدار ویژه
(میزان کشش/فشرده‌گی)

بردار ویژه
(جهت و ثابت)

$$Av = \lambda v$$

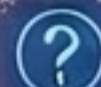
بردار ویژه
(جهت خاص و ثابت)

مقدار ویژه
(میزان کشش/فشرده‌گی)



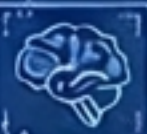
تفاوت λ و v چیست؟

v یک جهت (بردار) است، λ یک عدد (نرخ مقیاس) است.



⚠ اشتباه رایج:

اشتباه رایج: تصور اینکه بردارهای ویژه تصادفی هستند. آن‌ها نشان‌دهنده اسکلت اصلی و ساختار ذاتی سیستم می‌باشند.



تغییر مختصات با بردارهای ویژه

چرخاندن زاویه دید به گونه‌ای که ماتریس پیچیده به یک ماتریس قطری و ساده تبدیل شود.

شهود:

اگر به سایه درهم‌ریخته یک جسم نامنظم از زاویه‌ای خاص نگاه کنید، سایه به یک مربع کامل تبدیل می‌شود.

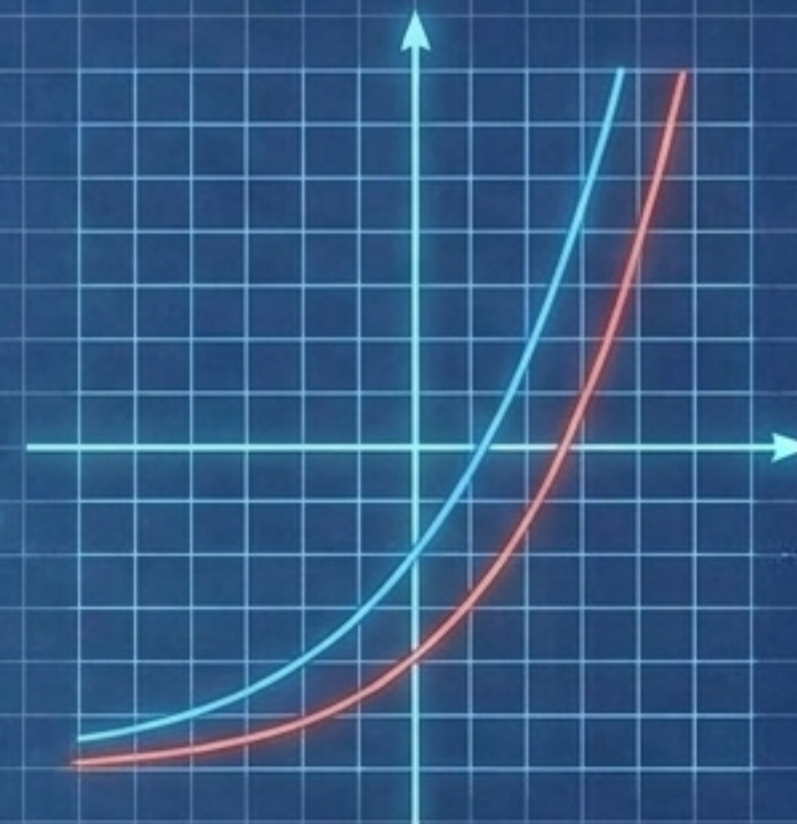


معادلات گره‌خورده

پیدا کردن
بردارهای ویژه و
چرخش محورها



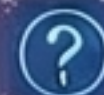
حل آسان



معادلات مستقل شده - Decoupled



چرا قطری می‌کنیم؟ چون هیچ
متغیب نمی‌شود و حل آن با
کاغذ ممکن می‌شود.



اشتباه رایج:

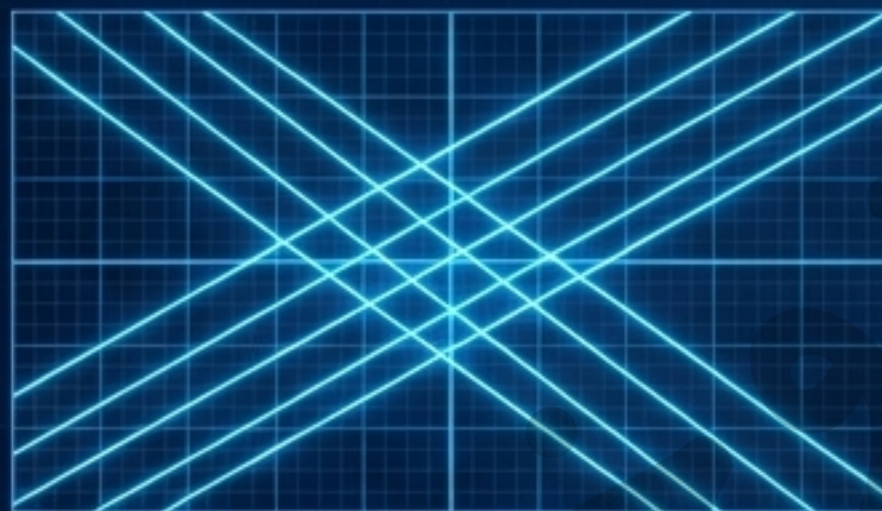
اشتباه رایج: فراموش کردن تبدیل مجدد
به مختصات اولیه! پس از حل، باید جواب
را به دنیای واقعی برگردانید.

مثال عملی: باز کردن گره معادلات بازوی رباتیک. حرکات شانه و
آرنج در فضای جدید کاملاً مستقل تحلیل می‌شوند.

سیستم‌های خطی در برابر غیرخطی (Linear vs. Non-Linear)

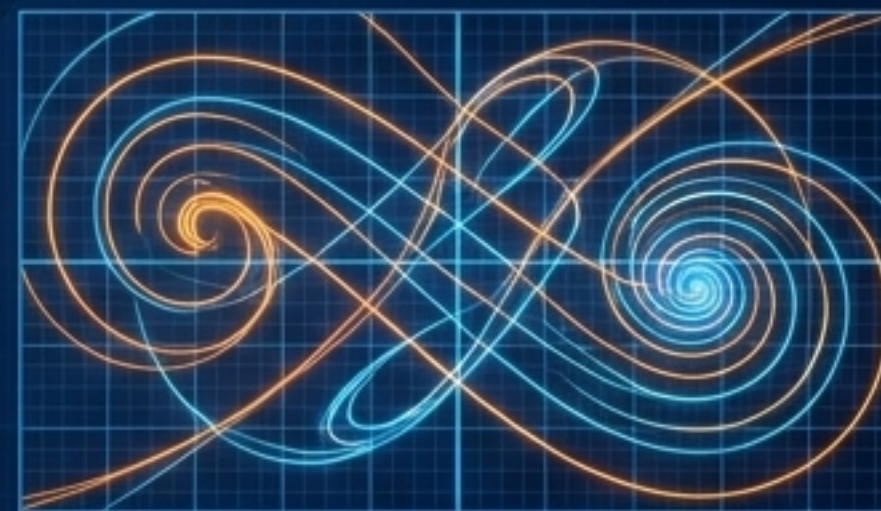
سیستم‌های خطی (Linear)

- **قانون:** متغیرها فقط با هم جمع یا در اعداد ثابت ضرب می‌شوند.
- **معادله نمونه:** $\dot{x} = 2x + 3y$
- **رفتار:** ورودی دو برابر = خروجی دو برابر.



سیستم‌های غیرخطی (Non-Linear)

- **قانون:** متغیرها در هم ضرب می‌شوند، توان می‌گیرند یا توابع پیچیده دارند.
- **معادله نمونه:** $\dot{x} = \sin(x)$ یا $\dot{x} = x \cdot y$
- **رفتار:** اثر پروانه‌ای. تغییر کوچک می‌تواند منجر به انفجار سیستم شود.

**مثال عملی:**

متابولیسم بدن انسان.
خوردن دو برابر قند به معنای دو برابر شدن انرژی نیست؛ سیستم مسیرهای واکنش جدیدی را فعال می‌کند.

آیا با جبر خطی ساده حل می‌شوند؟
خیر، جبر خطی کلاسیک مستقیماً برای غیرخطی‌ها کار نمی‌کند.

⚠ اشتباه رایج:

فرض اینکه طبیعت خطی است.
طبیعت ذاتاً غیرخطی است؛ مدل‌های فقط تقریب‌های مهندسی هستند.



نظریه آشوب و سیستم لورنز (Chaos Theory)

- سیستم‌های قطعی (دارای قانون مشخص) که به شدت به شرایط اولیه حساس هستند.

شهود:

اگر: مخلوط کردن رنگ در آب. قواعد حرکت سیال دقیق هستند، اما پیش‌بینی شکل قطره غیرممکن است.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

عدد ثابت سیستم

تفاوت متغیرها (بازخورد)

عدد ثابت سیستم

ترکیب این معادله با سایر معادلات شامل ضرب متغیرها $(x \cdot z)$ است که رفتار غیرخطی و آشوب ایجاد می‌کند.

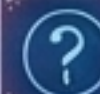
نحوه کارکرد:

۱. معادلات کاملاً دقیق نوشته می‌شوند (بدون تصادف).
۲. دو نقطه با فاصله میکروسکوپی شروع به حرکت می‌کنند.
۳. پس از مدت کوتاهی، مسیر آن‌ها کاملاً از هم جدا می‌شود.

مثال: آب و هوا. جابجایی آشوبناک هوا باعث می‌شود هوای یک ماه آینده قابل پیش‌بینی نباشد.



اشتباه رایج: مترادف این تصادفی دانستن حساسیت به نقطه شروع است.



اشتباه رایج:

مترادف دانستن آشوب با تصادفی بودن. آشوب از قوانین دقیق پیروی می‌کند، مشکل حساسیت به نقطه شروع است.

روش‌های تحلیلی در برابر عددی

وقتی ریاضیات روی کاغذ شکست می‌خورد، کامپیوترها با شبیه‌سازی گام‌به‌گام وارد عمل می‌شوند.

روش تحلیلی (Analytical - روی کاغذ)

- **استعاره:** داشتن فرمول تله‌پورت مستقیم به مقصد.
- **خروجی:** یک فرمول بسته و دقیق (مثل $\sin, \cos$).
- **محدودیت:** فقط برای سیستم‌های ساده و خطی کار می‌کند.
- **فایده:** شهود عمیق از ذات سیستم می‌دهد.

روش عددی (Numerical - پایتون / MATLAB)

- **استعاره:** راه رفتن قدم‌به‌قدم با قطب‌نما در تاریکی.
- **خروجی:** تخمین نقطه‌به‌نقطه (مثل روش اویلر).
- **محدودیت:** همراه با خطای محاسباتی است.
- **فایده:** قابل استفاده برای هر سیستم پیچیده و غیرخطی.

مثال عملی: جریان سیال حول یک استوانه. اسحاق نیوتن نتوانست این را با کاغذ حل کند، اما امروز با کامپیوتر شبیه‌سازی می‌شود.

اشتباه رایج: اعتماد ۱۰۰٪ به خروجی کامپیوتر. اگر روش عددی به درستی تنظیم نشود (Time-step) بزرگ باشد، شبیه‌سازی منفجر می‌شود.



ادغام ذرات آزمایشی (Test Particles)

• رها کردن ذرات مجازی در یک شبیه‌سازی سیال برای مشاهده مسیر حرکت آن‌ها در میدان برداری.

شهود:

اگر: انداختن یک برگ روی سطح رودخانه.
مسیر برگ، جریان پنهان و پیچیده آب را نشان می‌دهد.

مراحل شبیه‌سازی:

۱. میدان سرعت (Vector Field)
با معادلات محاسبه می‌شود.

۲. ذره‌ای مجازی در یک
مختصات قرار می‌گیرد.

۳. کامپیوتر جهت فلش میدان را
می‌خواند و ذره را جلو می‌برد.

۴. این حلقه هزاران بار
تکرار می‌شود.

میدان برداری چیست؟

نقشه‌ای از فلش‌ها که می‌گوید سیال با چه سرعت و جهتی حرکت می‌کند.

مثال عملی:

مثال عملی: پیش‌بینی نشت نفت در خلیج مکزیک.
ذرات مجازی در مدل اقیانوس رها می‌شوند تا
بفهمیم لکه به کدام ساحل می‌رسد.

اشتباه رایج: فراموش کردن اینکه میدان برداری نیز با گذشت زمان
تغییر می‌کند. رودخانه همیشه ثابت نیست!

Dynamic Blueprint

کاربرد عملی: دینامیک سیالات و زیست‌شناسی

استفاده از معادلات دیفرانسیل برای مدل‌سازی مرزهای پیچیده سیالات و نیروی محرکه زیستی.

شهود:

اگر عروس دریایی برای حرکت، گرداب‌هایی از آب را به عقب پرتاب می‌کند؛ شبیه شلیک گلوله (قانون عمل و عکس‌العمل).

ذرات مکیده شده
(تغذیه - Entrained)

ذرات دفع شده
(نیروی محرکه - Ejected)

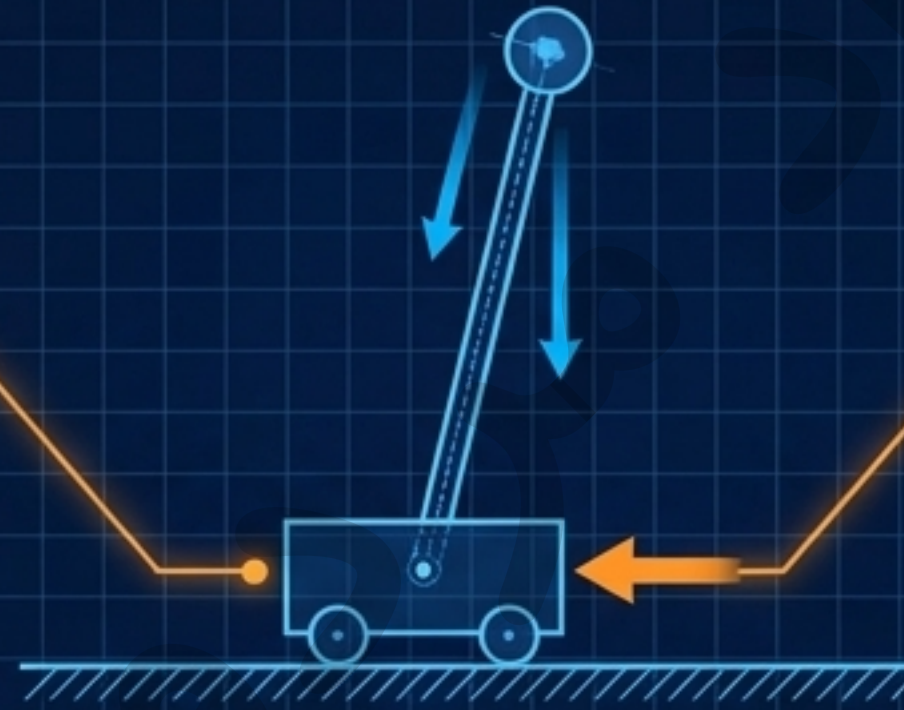
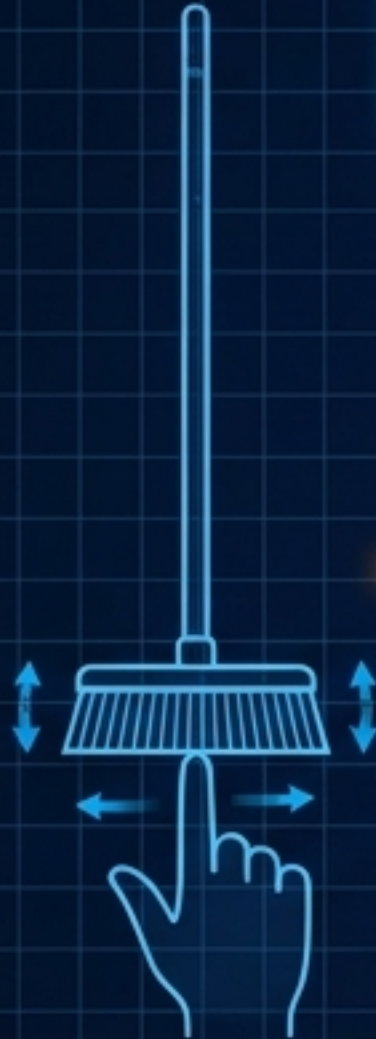
پروژه واقعی: مهندسان با درک این معادلات، یک عروس دریایی مکانیکی با استفاده از بافت قلب موش ساختند که با پالس الکتریکی در آب شنا می‌کند. **فایده این مدل‌سازی؟** درک مکانیزم‌های بهینه طبیعت برای طراحی ماشین‌های بهتر.

اشتباه رایج: تفکیک فیزیک از زیست‌شناسی. حیوانات هم از قوانین پایه مکانیک ($F=ma$) و معادلات دیفرانسیل پیروی می‌کنند.

جواد مردوخ‌ی

سیستم‌های کنترل و رباتیک

استفاده از معادلات دیفرانسیل برای پایدار کردن سیستم‌های ناپایدار. شهود: حفظ تعادل جارو روی انگشت. اگر جارو به چپ متمایل شود، انگشت باید فوراً به چپ حرکت کند.



پاندول معکوس (Inverted Pendulum)



فرود راکت Falcon 9

۱. معادلات دیفرانسیل ناپایداری را مدل می‌کنند.
۲. سنسورها انحراف را اندازه می‌گیرند.
۳. کنترل‌کننده محاسبه می‌کند چه نیرویی برای جبران نیاز است.

انسان در حال راه رفتن یک پاندول معکوس مضاعف و به شدت ناپایدار است.

اشتباه رایج: تصور اینکه سیستم‌های ناپایدار بد هستند.
ناپایداری یعنی مانورپذیری بالا، به شرطی که کنترل‌کننده قدرتمند باشد.



از ریاضیات کلاسیک تا شبیه‌سازی‌های مدرن (Data-Driven)

چرا یادگیری معادلات تحلیلی، شما را در هوش مصنوعی قوی‌تر می‌کند؟
شهود: یادگیری گیتار کلاسیک قبل از سینتیتی‌سایزرهای الکترونیک. اصول پایه، قدرت خلق ابزارهای مدرن را می‌دهد.

درک بردارهای ویژه
(Eigenvectors)

درک فرکانس‌ها در معادلات

درک سیستم‌های دینامیکی

درک SVD
(فشرده‌سازی داده‌ها در یادگیری ماشین)

تبدیلات فوریه
(فشرده‌سازی تصاویر JPEG و صوت)

طراحی شبکه‌های عصبی عمیق
(Deep Learning)

مثال عملی: با همان ریاضیاتی که برای ارتعاش پل‌ها توسعه یافت، داده‌های زائد یک عکس (JPEG) را حذف می‌کنیم بدون افت کیفیت.
چرا هوش مصنوعی؟ الگوریتم‌های هوش مصنوعی سیستم‌های دینامیکی پیچیده‌ای هستند که داده‌ها را تغییر شکل می‌دهند.

اشتباه رایج: پریدن مستقیم به پایتون بدون درک جبر خطی.
این کار شما را به یک اپراتور تبدیل می‌کند، نه مهندس خالق.

سنتز: نقشه راه سیستم‌های دینامیکی



- جهان قوانین خود را با زبان تغییرات می‌نویسد، نه موقعیت‌های ثابت.
- جبر خطی تنها راه حل معمای متغیرهای درهم‌تنیده است.
- کامپیوترها معادلات حل‌نشده را شبیه‌سازی می‌کنند، اما شهود از ریاضیات کلاسیک می‌آید.

اشتباه رایج: دیدن این موضوعات به عنوان درس‌های مجزا. همه آن‌ها یک سیستم یکپارچه برای مهندسی واقعیت هستند.

خلاصه‌ی کلیدی:

- ✓ مشتق ($\dot{x}$) ماشین زمان ما برای پیش‌بینی آینده است.
- ✓ سیستم‌های ODE رفتار موجوداتی که روی هم اثر می‌گذارند را مدل می‌کنند.
- ✓ ماتریس‌ها روش طبیعت برای سازماندهی پیچیدگی هستند.
- ✓ **بردارهای ویژه** عینک‌هایی برای ساده دیدن سیستم‌ها هستند.
- ✓ طبیعت ذاتاً غیرخطی و گاهی آشوبناک است.

سه دام خطرناک (Pitfalls):

۱. اشتباه گرفتن حالت سیستم (x) با نرخ تغییر ($\dot{x}$).
۲. فراموش کردن اینکه جبر خطی، هندسه است نه فقط جدول اعداد.
۳. کورکورانه اعتماد کردن به کد بدون داشتن شهود فیزیکی.

قوانین طلایی (Golden Rules)

۱. همیشه ابتدا ساده‌ترین مدل (خطی) را بررسی کنید، سپس پیچیدگی (غیرخطی) را اضافه کنید.
۲. اگر سیستمی بیش از حد پیچیده است، مختصات مجعوم خود را تغییر دهید (بردارهای ویژه).
۳. ریاضیات را برای خودش نخوانید؛ آن را به عنوان ابزاری برای پرواز دادن موشک‌ها و ساختن آینده ببینید.

اشتباه رایج: رها کردن یادگیری در این نقطه.
این تازه شروع سفر شماست!

آزمون نهایی و قدم‌های بعدی

بخش مفهومی:

۱. ODE مخفف چیست و چه چیزی را بیان می‌کند؟
۲. کاربرد اصلی بسط تیلور چیست؟
۳. چرا در سیستم‌های چندمتغیره به ماتریس نیاز داریم؟
۴. بردار ویژه چه ویژگی خاصی در یک تغییر ماتریسی دارد؟
۵. تفاوت اصلی یک سیستم خطی با غیرخطی چیست؟
۶. آیا یک سیستم آشوبناک از قوانین تصادفی پیروی می‌کند؟

بخش کاربردی:

۷. در معادله $\dot{x} = 5x$ ، اگر $x=2$ باشد، نرخ تغییر چقدر است؟
۸. چرا برای فرود موشک از سیستم پاندول معکوس استفاده می‌شود؟
۹. نقش میدان برداری در شبیه‌سازی نشت نفت چیست؟
۱۰. چرا نیوتن نتوانست جریان حول استوانه را روی کاغذ حل کند؟

مسیر یادگیری بعدی:

۱. حساب برداری و معادلات با مشتقات جزئی (PDEs)
۲. آنالیز مختلط (Complex Analysis)
۳. تبدیلات فوریه و لاپلاس

پاسخ‌ها: ۱. قانون تغییر. ۲. تقریب زدن. ۳. مدیریت معادلات درهم‌تنیده. ۴. تغییر جهت نمی‌دهد. ۵. خطی قابل جمع، غیرخطی پیچیده. ۶. خیر، قطعی است. ۷. ۵. ۸. ۱۰. اکت نابینا است. ۹. نشان دادن سرعت آب. ۱۰. نیاز به شبیه‌سازی عددی است.