

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری توانی: یک رویکرد قدم به قدم

محدوده موضوع:

کشف منشأ تابع نمایی (e^{at}) با حل حل معادله دیفرانسیل پایه از طریق بسط سری تیلور (سری توانی).



$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\pi u^2} e^{n-x} + \dots$$

پیشنیازها:

آشنایی پایه با مشتق‌گیری (Derivative) و چندجمله‌ای‌ها.

$$\frac{d}{dx} P(x) = a_0 + a_1 x + \dots$$

اهداف یادگیری:

- درک مفهوم و فیزیک پشت معادله دیفرانسیل $x' = ax$.
- یادگیری نحوه جایگذاری سری توانی در معادلات دیفرانسیل.
- استخراج گام به گام ضرایب و کشف رابطه بازگشتی (Recursion).
- اثبات اینکه تابع نمایی، همان بسط بی‌نهایت سری توانی است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

چرا این موضوع مهم است؟

این روش صرفاً برای حل یک معادله ساده نیست؛ بلکه یک «ابزار ابرقدرت» ریاضی است که برای حل پیچیده‌ترین معادلات غیرخطی فیزیک و مهندسی (مثل توابع بسل) که هیچ راه حل مستقیمی ندارند، استفاده می‌شود.



COMMON MISTAKE

تصور اینکه فرمول‌های ریاضی (مثل تابع نمایی) از آسمان افتاده‌اند! در واقع همه آن‌ها براساس منطق و قدم به قدم «کشف» شده‌اند.

معادله دیفرانسیل رشد خطی

A) CONCEPT

****معادله دیفرانسیل مرتبه اول**

****:(First-Order ODE)**

معادله‌ای که سرعت تغییرات یک متغیر را به مقدار فعلی آن مرتبط می‌کند.

B) INTUITION



یک گلوله برف غلتان را تصور کنید. هرچه بزرگتر می‌شود، سطح بیشتری برای جذب برف دارد. سرعت رشد متناسب با اندازه فعلی است.

۰۹۳۸۳۹۴۴۴۷۷

C.5 FORMULA UNPACKING

[مقدار فعلی] x [نرخ ثابت] a [سرعت رشد] x'

$$x' = ax$$

• بیان ساده: سرعت تغییرات x برابر است با مقدار فعلی x ضربدر یک عدد ثابت.

• جایگذاری عددی: اگر $a = 2$ و $x = 10$ باشد، سرعت رشد $x' = 2 \times 10 = 20$ است.

• فرض پنهان: ضریب a در طول زمان تغییر نمی‌کند.

⚠ COMMON MISTAKE

اشتباه گرفتن x (مقدار) با x' (سرعت تغییرات). x' شیب نمودار است، نه خود نمودار!

mathbaz.ir

C) HOW IT WORKS

۱. مقدار فعلی متغیر را اندازه‌گیری می‌کنیم.
۲. آن را در یک ضریب ثابت (نرخ رشد) ضرب می‌کنیم.
۳. عدد حاصل، دقیقاً سرعت تغییر (مشتق) آن متغیر در همان لحظه است.

D) PRACTICAL EXAMPLE

جمعیت خرگوش‌ها: اگر ۱۰۰ خرگوش داریم ($x = 100$) و نرخ زاد و ولد ۱۰ درصد در ماه است ($a = 0.1$)، سرعت رشد در این ماه برابر است با $100 \times 0.1 = 10$ خرگوش بر ماه.

E) MINI CHECK

- سوال: اگر a منفی باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟
- جواب درست: سیستم دچار «زوال» می‌شود و به مرور به صفر می‌رسد.

جواد مردوخی

قفل کردن نقطه شروع با شرط اولیه

A) CONCEPT

**شرط اولیه (X_0):

مقدار دقیق متغیر در زمان شروع (زمان صفر).
(مثال: پولی که روز اول در بانک می‌گذارید).

B) INTUITION



معادله دیفرانسیل مثل نقشه مسیر است، اما به شما نمی‌گوید از کجا شروع کرده‌اید. شرط اولیه، «نقطه شروع» شما روی جی‌پی‌اس (GPS) است.

C.5 FORMULA UNPACKING

[مقدار اولیه ثابت] [تابع در زمان صفر]

$$x(0) = x_0$$

- بیان ساده: مقدار x در زمان صفر، برابر با یک عدد مشخص به نام x_0 است.

- جایگذاری عددی: پولی که روز افتتاح حساب واریز می‌کنید: $x(0) = \$5000$ پس $x_0 = 5000$.

- فرض پنهان: زمان از $t = 0$ شروع می‌شود و گذشته‌ای مد نظر نیست.

⚠ COMMON MISTAKE

فراموش کردن اعمال شرط اولیه؛ بدون آن، ما فقط بی‌نهایت جواب ممکن داریم، نه یک جواب قطعی.

C) HOW IT WORKS

۱. زمان را صفر در نظر می‌گیریم ($t = 0$).
۲. مقدار متغیر را در این زمان مشخص می‌کنیم.
۳. این مقدار را به عنوان پایه برای پیش‌بینی‌های آینده قفل می‌کنیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

سرمایه‌گذاری بانکی: معادله دیفرانسیل نرخ سود را توصیف می‌کند، اما این x_0 1000 = است که تعیین می‌کند ۱۰ سال بعد دقیقاً چقدر پول خواهید داشت.

E) MINI CHECK

- سوال: آیا دو سیستم با معادله یکسان اما x_0 متفاوت، به یک مقدار نهایی می‌رسند؟
- جواب درست: خیر، مسیرهای موازی (اما جداگانه) را طی می‌کنند.

جواد مردوخ

هدف نهایی: تابع نمایی استاندارد

A) CONCEPT

****تابع نمایی (Exponential Function):**

راه حل استاندارد برای سیستم‌هایی که رشدشان متناسب با خودشان است (پایه e).

B) INTUITION



تابع نمایی مثل جادوی سود مرکب در طبیعت است؛ نشان می‌دهد چگونه رشد مداوم و بی‌وقفه، باعث انفجار مقدار در طول زمان می‌شود.

۰۹۳۸۳۹۴۴۴۷۷

C.5 FORMULA UNPACKING

[مقدار در زمان t]

$$X(t) = X_0 \cdot e^{at}$$

[فاکتور رشد مرکب]

• بیان ساده: مقدار نهایی برابر است با مقدار اولیه ضربدر فاکتور رشد نمایی.

• جایگذاری عددی: $X_0 = 100, a = 1, t = 2 \Rightarrow X(2) = 100 \times e^2 \approx 738$.

• فرض پنهان: رشد به طور پیوسته (نه گسسته) در هر لحظه رخ می‌دهد.

⚠ COMMON MISTAKE

حفظ کردن فرمول بدون درک دلیل آن. هدف ما در اسلایدهای بعدی کشف منشأ این e است!

mathbaz.ir

C) HOW IT WORKS

۱. نقطه شروع (X_0) را می‌گیریم.

۲. آن را در تابع نمایی (e^{at}) ضرب می‌کنیم.

۳. مقدار سیستم در هر زمان دلخواه t به دست می‌آید.

D) PRACTICAL EXAMPLE

فرار حرارتی: یک قطعه گرم می‌شود
($X_0 = 30^\circ$) گرمای بیشتر تولید گرمای شدیدتر می‌کند ($a = 0.5$).

دمای آن از فرمول $30e^{0.5t}$ پیروی کرده و سریعاً ذوب می‌شود!



E) MINI CHECK

• سوال: چرا در پایه این فرمول از عدد e استفاده می‌شود و نه ۱۰؟

• جواب درست: چون e تنها عددی است که مشتق تابع نمایی‌اش دقیقاً برابر با خودش است.

جواد مردوخی

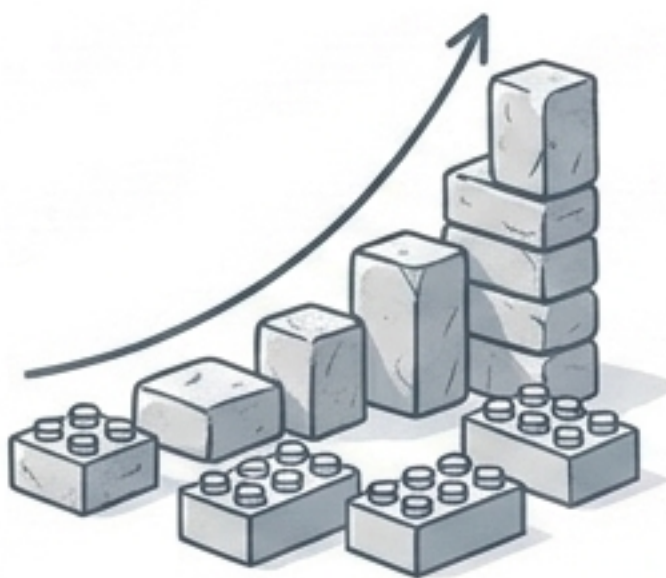
استراتژی اصلی: فرض سری توانی

A) CONCEPT

****سری توانی (Power Series):**

روشی برای نمایش هر تابع پیچیده به صورت جمع بی‌نهایت چندجمله‌ای ساده (توان‌های t).

B) INTUITION



تصور کنید می‌خواهید مجسمه‌ای پیچیده بسازید. به جای ساختن یکپارچه آن، آن را با بلوک‌های ساده لگو (توان‌های t) قطعه‌قطعه می‌سازید.

C.5 FORMULA UNPACKING

[قطع‌ات لگوی ریاضی] [تابع جواب]

$$X(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

• بیان ساده: جواب ما جمع بی‌نهایت ضرایب مجهول ضربدر توان‌های مختلف زمان است.

• جایگذاری عددی: اگر $c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 3$

$t \Rightarrow X(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \dots$ درستی مدل می‌کند و رفتار تابع را

فرض پنهان: این سری همگراست (به بی‌نهایت میل نمی‌کند) و رفتار تابع

⚠ COMMON MISTAKE

ترسیدن از علامت نقطه چین (...). این فقط یعنی الگو ادامه دارد، نیازی نیست همه را بنویسید!

C) HOW IT WORKS

۱. فرض می‌کنیم جواب $X(t)$ یک سری بی‌نهایت از توان‌های t است.
۲. هر توان t یک ضریب مجهول (c) دارد.
۳. هدف ما پیدا کردن این ضرایب ($c_0, c_1, c_2, \dots$) است.

D) PRACTICAL EXAMPLE

ماشین حساب‌ها توابعی مثل لگاریتم را حفظ نیستند؛ بلکه از همین بسط‌های چندجمله‌ای ساده برای محاسبه آن‌ها با چهار عمل اصلی استفاده می‌کنند!

E) MINI CHECK

- سوال: چرا از توان‌های t استفاده می‌کنیم نه توابع دیگر؟
- جواب درست: چون مشتق‌گیری و جمع از هر تابع دیگری در ریاضی آسان‌تر است.

جواد مردوخی

گرفتن مشتق از سری توانی (x')

A) CONCEPT

****مشتق سری (Series Derivative):**
اعمال قانون ساده مشتق‌گیری روی تک‌تک جملات بسط داده شده. (مثال: مشتق $3t^2$ می‌شود $6t$).

B) INTUITION



برای وزن کردن یک سبد میوه، می‌توانید تک‌تک میوه‌ها را جداگانه وزن کنید و جمع بزنید. یا و جمع بزنید. اینجا هم مشتق یک یکا جمع طولانی با مشتق‌گیری از تک‌تک اجزای آن به دست می‌آید.

۰۹۳۸۳۹۴۴۷۷

C.5 FORMULA UNPACKING

[سرعت تغییرات]

$$x' = c_1 + \underbrace{2c_2t + 3c_3t^2 + \dots}_{\text{[جملات مشتق گرفته شده]}}$$

• بیان ساده: سرعت تغییرات سری توانی با پایین آوردن توان‌ها و ضرب در ضرایب نشان داده می‌شود.

• جایگذاری عددی: اگر $x' = 0 + 4 + 6t \Rightarrow X(t) = 5 + 4t + 3t^2$

• فرض پنهان: تابع به قدری هموار است که می‌توان جمله به جمله از آن تا بی‌نهایت مشتق گرفت.

⚠ COMMON MISTAKE

فراموش کردن پایین آوردن توان قبلی به عنوان ضریب جدید (نوشتن c_3t^2 به جای $3c_3t^2$).

mathbaz.ir

C) HOW IT WORKS

۱. ثابت c_0 چون زمان ندارد، صفر و حذف می‌شود.
۲. در جمله c_1t ، متغیر t حذف می‌شود.
۳. در c_2t^2 ، توان ۲ به عنوان ضریب پایین می‌آید.

D) PRACTICAL EXAMPLE

اگر فرمول موقعیت ماشین شما $X(t) = 10 + 5t + 2t^2$ متر باشد، سرعت شما (مشتق) برابر است با $5 + 4t$ متر بر ثانیه.

E) MINI CHECK

- سوال: چرا c_0 در معادله مشتق ناپدید شد؟
- جواب درست: چون c_0 عدد ثابت است و مقدار ثابت با گذشت زمان تغییر نمی‌کند (سرعت تغییر آن صفر است).

جواد مردوخی

ضرب سری در ضریب ثابت (aX)

A) CONCEPT

****توزیع اسکالر (Scalar Distribution):**
ضرب کردن یک عدد ثابت در کل یک سری
بی نهایت. (مثال: دو برابر کردن تک تک
مواد اولیه در یک دستور پخت).

B) INTUITION



تصور کنید به هر قطعه از مجسمه
لگویی خود یک رنگ (ضریب a)
می پاشید. این رنگ روی تک تک قطعات
می نشیند، بدون اینکه شکل یا جایگاه
آنها را عوض کند.

C.5 FORMULA UNPACKING

[طرف راست معادله]

$$aX = ac_0 + ac_1t + ac_2t^2 + \dots$$

- بیان ساده: کل تابع با ضریب a مقیاس دهی (بزرگ یا کوچک) شده است.
- جایگذاری عددی: اگر $a = 2$ و $2X = 2(1) + 2(3t) \Rightarrow X(t) = 1 + 3t$
- فرض پنهان: توزیع یک عدد ثابت در یک سری بی نهایت، رفتار کلی سری را مختل نمی کند.

⚠ COMMON MISTAKE

ضرب کردن a فقط در جمله اول سری و فراموش کردن توزیع آن در بقیه جملات!

C) HOW IT WORKS

۱. کل سری توانی $X(t)$ را داخل پرانتز می نویسیم.
۲. ضریب a را بیرون پرانتز قرار می دهیم.
۳. عدد a را در تک تک جملات سری ضرب (توزیع) می کنیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

نرخ بهره: اگر پس انداز طبق فرمول
 $1000 + 50t$ رشد کند و بانک سود ۵ درصد
($a = 0.05$) اعلام کند، سود روی هر دو بخش
توزیع می شود: $0.05(1000) + 0.05(50t)$.

E) MINI CHECK

- سوال: آیا ضرب کردن سری در a توان های t را تغییر می دهد؟
- جواب درست: خیر، a فقط ضریب عددی است و تاثیری روی متغیر زمان ندارد.

جواد مردوخ

اصل هم‌ارزی دو عبارت بی‌نهایت

A) CONCEPT

****برابری سری‌ها (Equivalence of Series):**
قرار دادن بسط مشتق (x') در برابر بسط مقدار (aX) طبق معادله دیفرانسیل اولیه.

B) INTUITION



مثل ترازوی دو کفه‌ای است. معادله دیفرانسیل $x' = aX$ به زبان «سری‌های توانی» ترجمه شده است. حالا کفه چپ باید دقیقاً با کفه راست در تعادل کامل باشد.

۰۹۳۸۳۹۴۴۴۷۷

C.5 FORMULA UNPACKING

$$(c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2 + \dots) = (ac_0 + ac_1t + ac_2t^2 + \dots)$$

- بیان ساده: این بسط‌یافته‌ی همان معادله اصلی است که به صورت دو قطار بی‌نهایت رودرروی هم قرار گرفته‌اند.
- فرض پنهان: این تساوی باید برای تمام مقادیر زمان (t) برقرار باشد، نه فقط یک لحظه خاص.

⚠ COMMON MISTAKE

گیج شدن از طولانی بودن فرمول. به یاد داشته باشید این فقط همان $x' = aX$ است که لباس طولانی‌تری پوشیده!

mathbaz.ir

C) HOW IT WORKS

۱. عبارت به دست آمده برای x' را در سمت چپ می‌نویسیم.
۲. عبارت به دست آمده برای aX را در سمت راست می‌نویسیم.
۳. علامت مساوی را بین آن‌ها قرار می‌دهیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

وقتی سیگنال ارسال شده با سیگنال دریافت شده مقایسه می‌شود، مهندسان مخابرات دو موج را روبروی هم قرار می‌دهند تا تفاوت‌ها را موج به موج پیدا کنند.

E) MINI CHECK

- سوال: شرط اینکه این تساوی درست کار کند چیست؟
- جواب درست: این تساوی باید برای تمام مقادیر t (از $t = 0$ تا بی‌نهایت) برقرار باشد.

جواد مردوخی

تکنیک تطبیق ضرایب (Matching Coefficients)

A) CONCEPT

تطبیق نقطه به نقطه:
قانونی که می‌گوید اگر دو
چندجمله‌ای همیشه برابرند،
ضرایب توان‌های یکسان در
هر دو طرف باید دقیقاً
مساوی باشند.

B) INTUITION

مانند مرتب کردن دو دسته
کارت بازی مخلوط شده است.
شما کارت‌های پیک را با پیک،
و دل را با دل مثل مقایسه
می‌کنید. اینجا،
کارت‌ها همان توان‌های t
هستند.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$(c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2 + \dots) = (ac_0 + ac_1t + ac_2t^2 + \dots)$$

$$c_1 = a \cdot c_0$$

[جمله بدون t در راست] [جمله بدون t در چپ]

- بیان ساده: تطبیق اولین جفت کارت (جملات بدون زمان یا t^0) از دو طرف معادله.
- جایگذاری عددی: اگر $a = 2$ و $c_0 = 5$ باشد، نتیجه می‌گیریم حتماً باید $c_1 = 10$ باشد.
- فرض پنهان: توان‌های مختلف t مستقل هستند (نمی‌توان کمبود t را با t^2 جبران کرد).

C) HOW IT WORKS

1. به طرفین معادله نگاه می‌کنیم.
2. جملاتی که t ندارند را با هم مساوی قرار می‌دهیم.
3. جملاتی که t^1 دارند را با هم مساوی قرار می‌دهیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

در استودیو، مهندس صدا
فرکانس‌های بم سمت چپ و
راست را با هم، و فرکانس‌های
زیر را با هم تطبیق می‌کند. او
فرکانس بم را با زیر مقایسه
نمی‌کند!

E) MINI CHECK

- سوال: چرا نمی‌توانیم $2c_2t$ را با ac_0 مساوی قرار دهیم؟
- جواب درست: چون توان‌های t آن‌ها یکی نیست (یکی t^1 است و دیگری t^0).

! COMMON MISTAKE

تلاش برای حل کل معادله به صورت یکجا. جادوی این روش در خرد کردن معادله به تکه‌های کوچک (توان‌های برابر) است.

چوادمردوخی

یافتن اولین دومینو با شرط اولیه

A) CONCEPT

****اعمال شرط اولیه در سری:**
جایگذاری زمان صفر ($t = 0$) در کل سری
توانی برای پیدا کردن اولین ضریب (c_0).

B) INTUITION



ضریب c_0 اولین دومینوی ماست. برای پیدا کردنش، کافیست زمان را نگه داریم و به لحظه شروع (نقطه صفر) نگاه کنیم. در لحظه صفر، هیچ رشدی اتفاق نیفتاده است.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$c_0 = X_0$$

[اولین ضریب سری] [مقدار واقعی در زمان صفر]

- بیان ساده: اولین ضریب سری ما، دقیقاً همان مقدار اولیه سیستم در دنیای واقعی است.
- جایگذاری عددی: اگر خرگوش در زمان شروع داریم ($X_0 = 100$)، تمام ضرایب به جز c_0 صفر می‌شوند، پس $c_0 = 100$.
- فرض پنهان: تابع در نقطه صفر تعریف شده و پیوسته است.

C) HOW IT WORKS

۱. فرمول کلی سری را می‌نویسیم.
۲. زمان را صفر قرار می‌دهیم ($t = 0$).
۳. تمام جملاتی که t دارند صفر شده و حذف می‌شوند.
۴. فقط c_0 می‌ماند که برابر X_0 است.

D) PRACTICAL EXAMPLE

فرمول مسیر موشک یک چندجمله‌ای طولانی است. اگر $t = 0$ (لحظه پیش از پرتاب) را در آن قرار دهید، فقط فقط ارتفاع ثابت سکوی پرتاب باقی می‌ماند. این همان c_0 است.

E) MINI CHECK

- سوال: اگر زمان را $t = 1$ می‌گذاشتیم، آیا باز هم c_0 پیدا می‌شد؟
- جواب درست: خیر! اگر $t = 1$ بود، تمام ضرایب باقی می‌ماندند و حل غیرممکن می‌شد.

⚠ COMMON MISTAKE

فراموش کردن اینکه هدف نهایی، جایگزین کردن تمام مجهولات c با مقادیر شناخته شده مثل X_0 و a است.

حل اولین ضریب وابسته (c_1)

A) CONCEPT

****جایگذاری زنجیره‌ای (Substitution Chain Substitution):**
استفاده از مقدار کشف‌شده‌ی قبلی (c_0)
برای پیدا کردن مجهول جدید (c_1).

B) INTUITION



حالا که دومینوی اول (c_0) افتاده است، به دومینوی دوم (c_1) ضربه می‌زنند. ما می‌دانیم c_1 بر اساس c_0 ساخته می‌شود، پس فقط مقدار واقعی آن را قرار می‌دهیم.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$c_1 = a \cdot c_0$$
$$c_1 = a \cdot X_0$$

[جایگزین شده به جای c_0] [دومین ضریب سری]

- بیان ساده: ضریب دوم ما برابر است با نرخ رشد ضربدر مقدار اولیه.
- جایگذاری عددی: اگر $a = 0.1$ و $X_0 = 1000$ دلار باشد
 $\Rightarrow c_1 = 0.1 \times 1000 = 100$
- فرض پنهان: مقدار X_0 یک عدد معتبر و غیر مبهم است.

C) HOW IT WORKS

۱. معادله تطبیق t^0 را به یاد بیاورید:
 $c_1 = ac_0$
۲. ما تازه کشف کردیم که $c_0 = X_0$.
۳. در معادله اول، به جای c_0 مقدار X_0 را قرار می‌دهیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

اگر اصل وام شما ۱۰۰۰ دلار (X_0) با بهره ۵٪ ($a = 0.05$) باشد، شیب اولیه رشد بدهی شما (ضریب c_1) برابر با ۵۰ دلار در سال خواهد بود.

E) MINI CHECK

- سوال: نمادهای سمت راست معادله چه ویژگی مهمی دارند؟
- جواب درست: هر دو ثابت و «شناخته‌شده» هستند. یک مجهول با اطلاعات معلوم تعریف شد.

⚠ COMMON MISTAKE

رها کردن فرمول به صورت $c_1 = ac_0$. باید تا جایی پیش برویم که همه چیز بر اساس a و X_0 نوشته شود.

تطبیق و حل توان اول (t^1)

A) CONCEPT

****تطبیق مرتبه اول**
(First-Order Matching):
گام بعدی، مساوی قرار دادن ضرایب مربوط
به t^1 در دو طرف معادله برای پیدا کردن c_2 .

B) INTUITION



دومینوی سوم! حالا که c_1 را کاملاً بر
اساس متغیرهای معلوم پیدا کرده‌ایم، از
آن به عنوان پله‌ای برای رسیدن به c_2
استفاده می‌کنیم.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$\begin{aligned}
 2c_2 &= a \cdot c_1 \\
 &\downarrow \text{(Substitute } c_1) \\
 2c_2 &= a \cdot (aX_0) \\
 &\downarrow \text{(Move the 2)} \\
 c_2 &= \frac{a^2}{2} \cdot X_0
 \end{aligned}$$

[سومین ضریب]

- بیان ساده: ضریب سوم با تقسیم کردن نرخ رشد به توان دو بر عدد ۲ ضربدر مقدار اولیه به دست می‌آید.
- جایگذاری عددی: $2c_2 = a(aX_0) \Rightarrow c_2 = \frac{a^2}{2} X_0$
اگر $c_2 = 20 \Rightarrow a = 2, X_0 = 10$.
- فرض پنهان: مجاز به تقسیم دو طرف بر عدد ۲ هستیم.

C) HOW IT WORKS

۱. در سمت چپ، ضریب t^1 مقدار $2c_2$ است.
۲. در سمت راست، ضریب t^1 مقدار ac_1 است.
۳. مساوی قرار می‌دهیم: $2c_2 = ac_1$.
۴. c_1 را جایگذاری می‌کنیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

ضریب c_2 معادل شتاب است. در سود مرکب، فقط اصل پول سود نمی‌دهد، بلکه سودهای قبلی هم سود می‌دهند! پیدایش $a^2/2$ نشان‌دهنده همین سود بر روی سود است.

E) MINI CHECK

- سوال: عدد ۲ در مخرج کسر از کجا آمد؟
- جواب درست: از قانون مشتق‌گیری (زمانی که از t^2 مشتق گرفتیم و توان ۲ پایین آمد) نشأت گرفته است.

⚠ COMMON MISTAKE

فراموش کردن تقسیم بر ضریب سمت چپ. دانش‌آموزان اغلب می‌نویسند $c_2 = a^2 X_0$ و عدد ۲ را جا می‌اندازند!

تطبیق توان دوم (t^2) و تولد فاکتوریل

A) CONCEPT

****پیدایش فاکتوریل**
(Emergence of Factorial):
با پیشروی به سمت توان‌های بالاتر، مخرج کسرها به صورت ضرب اعداد متوالی (فاکتوریل) درمی‌آیند.

B) INTUITION



هر بار که مشتق می‌گیریم، یک عدد جدید از بالا سقوط می‌کند و در مخرج انباشته می‌شود! اول ۲ پایین آمد، حالا ۳ پایین می‌آید و در کنار ۲ قرار می‌گیرد.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$\begin{aligned} 3c_3 &= a \cdot c_2 \\ &\downarrow \text{(Substitute and divide)} \\ c_3 &= \frac{a^3}{3 \times 2} \cdot X_0 \quad \mathbf{3!} \\ &\downarrow \text{(Morphing } 3 \times 2 \text{ into factorial)} \\ c_3 &= \frac{a^3}{\mathbf{3!}} \cdot X_0 \end{aligned}$$

[مقدار اولیه] ← X_0 c_3 ← [چهارمین ضریب]

- بیان ساده: ضریب چهارم دارای مخرجی است که از ضرب متوالی اعداد (فاکتوریل) ساخته شده است.
- جایگذاری عددی: اگر $a = 1$, $X_0 = 6$
 $\Rightarrow c_3 = \frac{1^3}{3!} \times 6 = \frac{1}{6} \times 6 = 1$
- فرض پنهان: تعریف فاکتوریل به درستی برای اعداد صحیح مثبت اعمال می‌شود.

C) HOW IT WORKS

۱. جملات دارای t^2 را تطبیق می‌دهیم:
 $3c_3 = ac_2$
۲. برای پیدا کردن c_3 ، عدد ۳ را به مخرج طرف دیگر می‌بریم.
۳. مخرج تبدیل می‌شود به 3×2 که همان $3!$ است.

D) PRACTICAL EXAMPLE

در فرار حرارتی، مخرج $3!$ باعث می‌شود با وجود رشد شدید صورت کسر، مخرج نیز بزرگ شود و از بی‌نهایت شدن زودهنگام جلوگیری کند.

E) MINI CHECK

- سوال: اگر به جای ۳ فاکتوریل می‌نوشتیم ۶، چه مشکلی پیش می‌آمد؟
- جواب درست: جواب عددی درست «الگوی پنهان» برای ساخت فرمول کلی را از دست می‌دادیم.

⚠ COMMON MISTAKE

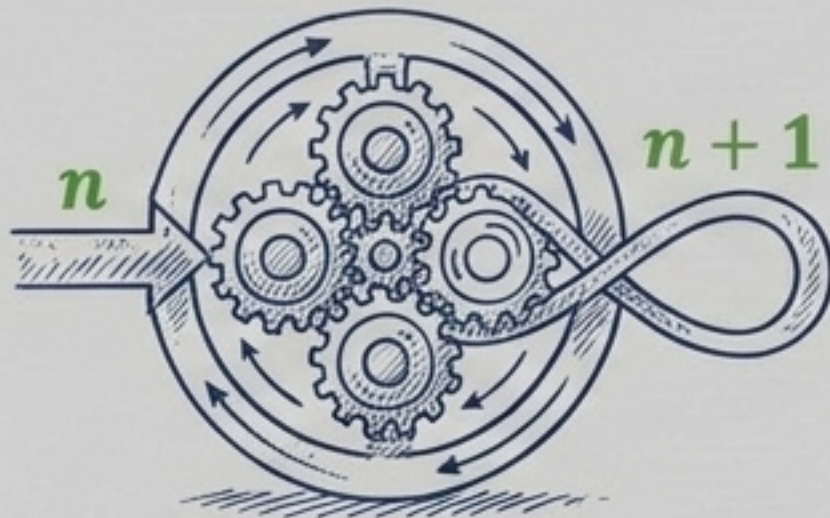
ضرب کردن ساده اعداد در مخرج به جای حفظ فرمت فاکتوریل. ریاضیدانان الگوها را حفظ می‌کنند تا به قانون کلی برسند!

فرمول طلایی: رابطه بازگشتی (Recursive)

A) CONCEPT

**رابطه بازگشتی (Recursion):
فرمولی کلی که هر مرحله را بر اساس
مرحله دقیقاً قبل از خودش می‌سازد.
(مثال: پله n ام = پله قبلی + یک قدم).

B) INTUITION



به جای اینکه تا بی‌نهایت محاسبه دستی
انجام دهیم، یک «ماشین تولید ضرب»
می‌سازیم. این ماشین با یک قانون کلی، می‌تواند
ضرب هزارم را به سادگی تولید کند.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$C_{n+1} = a \cdot C_n$$

$$C_{n+1} = \frac{a}{(n+1)} \cdot C_n$$

[ضرب گام فعلی] [ضرب گام بعدی]

- بیان ساده: ضرب بعدی، برابر است با ضرب فعلی ضربدر a تقسیم بر شماره مرحله بعد.
- جایگذاری عددی: اگر بخواهیم C_4 را پیدا کنیم ($n = 3$):
 $C_4 = \frac{a}{4} C_3$
- فرض پنهان: این الگو بدون استثنا تا بی‌نهایت معتبر است.

C) HOW IT WORKS

۱. الگوی توان‌های t^n را نگاه می‌کنیم.
۲. ضرب سمت چپ همیشه $(n+1)C_{n+1}$ است.
۳. ضرب سمت راست همیشه aC_n است.
۴. مساوی قرار می‌دهیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

اگر بخواهید این را در برنامه‌نویسی
بنویسید، یک حلقه (Loop) باز می‌کنید
و دقیقاً همین فرمول را می‌دهید
تا کامپیوتر در کسری از ثانیه هزاران
ضرب را حساب کند.

E) MINI CHECK

- سوال: مزیت بزرگ داشتن فرمول بازگشتی چیست؟
- جواب درست: به ما اجازه می‌دهد بدون نوشتن صدها خط معادله، الگوی انتقال بین ضرایب را تعریف کنیم.

⚠ COMMON MISTAKE

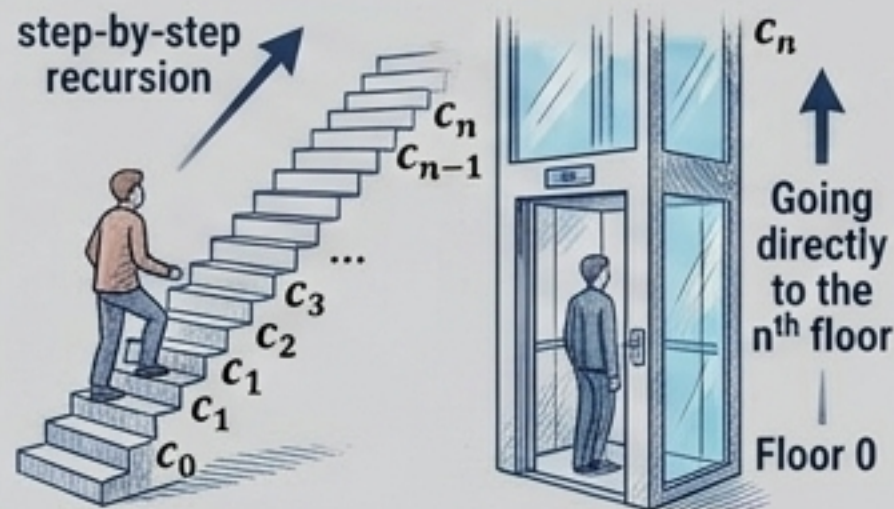
اشتباه گرفتن اندیس‌ها. به یاد داشته باشید ضرب بزرگتر (چپ) همیشه بر اساس ضرب کوچکتر (راست) ساخته می‌شود.

فرمول ضریب صدم (The General Term)

A) CONCEPT

****جمله عمومی سری (General Term):**
فرمولی صریح که وابستگی به مرحله قبل را حذف کرده و مستقیماً هر ضریب c_n را محاسبه می‌کند.

B) INTUITION



به جای اینکه برای رفتن به طبقه صدم مجبور باشید پله‌پله از طبقه اول شروع کنید، جمله عمومی مثل یک «آسانسور» شما را مستقیماً به طبقه دلخواه می‌برد!

C.5 FORMULA UNPACKING

$$c_n = \frac{a^n}{n!} \cdot X_0$$

[ضریب طبقه دلخواه]

• بیان ساده: هر ضریب دلخواه برابر است با نرخ رشد به توان همان مرحله، تقسیم بر فاکتوریل همان مرحله، ضربدر مقدار اولیه.

• جایگذاری عددی: ضریب پنجم ($n = 5$): $c_5 = \frac{a^5}{5!} X_0 = \frac{a^5}{120}$.

• فرض پنهان: استقرا (Induction) ریاضی برای این الگو اثبات شده است.

C) HOW IT WORKS

۱. به الگوهای قبلی نگاه می‌کنیم.
۲. متوجه می‌شویم توان a و فاکتوریل n مخرج دقیقاً با اندیس c برابرند.
۳. فرمول کلی و مستقل برای c_n می‌نویسیم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

در محاسبات فضایی، برای محاسبه دقیق مسیر ماهواره، نیازی به حل قدم به قدم نیست. آن‌ها مستقیماً ۵۰ جمله اول را با این آسانسور محاسبه کرده و جمع می‌کنند.

E) MINI CHECK

- سوال: وقتی n به شدت بزرگ شود، چه اتفاقی برای مقدار کل کسر می‌افتد؟
- جواب درست: کسر به سمت صفر می‌رود! فاکتوریل در مخرج بسیار سریع‌تر رشد می‌کند.

⚠ COMMON MISTAKE

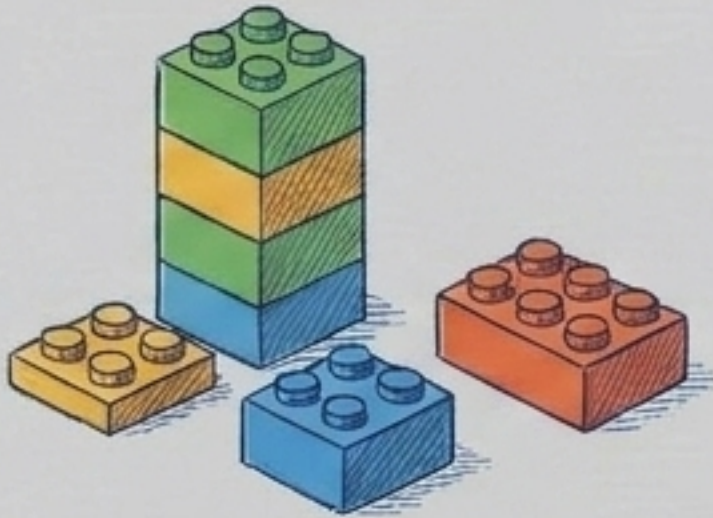
فراموش کردن قرار دادن X_0 در انتهای فرمول کلی. تمام این ضرایب در نهایت در مقدار اولیه ما ضرب می‌شوند.

جمع‌آوری و مونتاژ نهایی ($X(t)$)

A) CONCEPT

****فاکتورگیری مقدار اولیه: جایگذاری**
تمام ضرایب به دست آمده در سری
توانی اولیه و بیرون کشیدن X_0 به عنوان
عامل مشترک.

B) INTUITION



ما تمام قطعات لگو را با زحمت رنگ
کردیم و تراش دادیم. حالا وقت آن است
که آن‌ها را کنار هم بچسبانیم تا مجسمه
نهایی ما (جواب معادله) شکل بگیرد!

C.5 FORMULA UNPACKING

$$X(t) = X_0 \cdot \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots \right)$$

[فاکتور مشترک گرفته شده] [جواب نهایی زمان t]

- بیان ساده: تابع جواب نهایی برابر است با مقدار اولیه ضربدر پوانتزی پر از از توان‌ها و فاکتوریل‌ها.
- تقسیمی: فاکتور نهایی از یک سری بی‌نهایت به ضربدر یمش رانتزی پر فاکتوریل‌ها.
- فرض پنهان: فاکتورگیری از یک سری بی‌نهایت به لحاظ ریاضی مجاز است.

C) HOW IT WORKS

۱. فرمول خام را بازمی‌نویسیم.
۲. به جای c ‌ها، مقادیری که کشف کردیم را می‌گذاریم.
۳. می‌بینیم عبارت X_0 در تک‌تک جملات
۴. از X_0 فاکتور می‌گیریم.

D) PRACTICAL EXAMPLE

تفسیر مهندسی: عبارت بیرون پوانتزی (X_0) همان دارایی فعلی شماست و پوانتزی طولانی، «موتور تولید سود» است که کاملاً مستقل از اینکه چقدر پول دارید کار می‌کند.

E) MINI CHECK

- سوال: عدد ۱ در ابتدای پوانتزی از کجا آمد؟
- جواب درست: نتیجه فاکتور گرفتن X_0 از ضریب اول یعنی c_0 است (چون $c_0 = X_0$).

COMMON MISTAKE

فراموش کردن متغیر زمان (t) هنگام جایگذاری ضرایب. ضریب c_2 جایگذاری می‌شود، اما t^2 باید سر جایش بماند!

نقاب برداشتن از تابع نمایی (e^{at})

A) CONCEPT

****بسط تیلور تابع نمایی:** عبارت بی‌نهایت داخل پرانتز در اسلاید قبل، دقیقاً تعریف ریاضیاتی و رسمی تابع مشهور e^{at} است که اوایلر کشف کرد.

B) INTUITION

ما به دنبال حل یک معادله بودیم، اما در مسیر، یکی از مهم‌ترین فرمول‌های تاریخ را از صفر اختراع کردیم! این پرانتز طولانی، چهره‌ی بدون نقاب تابع e^{at} است.

ما به دنبال حل یک معادله بودیم، اما در مسیر، یکی از مهم‌ترین فرمول‌های تاریخ را از صفر اختراع کردیم! این پرانتز طولانی، چهره‌ی بدون نقاب تابع e^{at} است.

C.5 FORMULA UNPACKING

$$1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots \rightarrow e^{at}$$

[بسط تیلور کشف شده] [تابع نمایی نام آشنا]

- بیان ساده: تابع نمایی چیزی جز یک جمع بی‌نهایت از کسرها با مخرج فاکتوریل نیست.
- جایگذاری عددی: مقدار دقیق عدد e ($a = 1, t = 1$):
 $1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 \dots \approx 2.718$
- فرض پنهان: این سری برای تمام مقادیر به یک عدد محدود ختم می‌شود.

COMMON MISTAKE

تصور اینکه e یک ثابت فیزیکی (مثل سرعت نور) است. e صرفاً یک حد ریاضی و حاصل جمع این سری اعداد است!

C) HOW IT WORKS

۱. به پرانتز نگاه می‌کنیم.
۲. ریاضیدانان گفتند: این الگو خیلی زیاد تکرار می‌شود!
۳. برای راحتی، کل این پرانتز را یک نام کوتاه دادند: e^{at} .

D) PRACTICAL EXAMPLE

شما می‌توانید نام خودتان را روی این سری بگذارید! اما چون اوایلر زودتر این الگو را دید و پرکاربردترین راه حل طبیعت است، آن را تابع نمایی می‌نامیم.

E) MINI CHECK

- سوال: آیا این روش فقط برای تولید e^{at} کاربرد دارد؟
- جواب درست: خیر! با این ابزار می‌توان توابع ناشناخته‌ای مثل توابع بسل را برای معادلات پیچیده‌تر استخراج کرد.

جواد مردوخی

نگاه تصویر بزرگ: از مسئله تا کشف کیهانی

چگونه مفاهیم به هم متصل می‌شوند؟

نقشه راه ذهن شما در این سفر ریاضی:



بینش‌های کلیدی (Big Picture Insights):

- ریاضیات، کشف است نه اختراع: ما e را از هوا نیاوردیم، ساختار فیزیک رشد ما را مجبور کرد به فاکتوریل‌ها و عدد اویلر برسیم.
- قدرت سری‌های توانی: این روش مثل اشعه ایکس است؛ وقتی توابع استاندارد گیر می‌کنند، به عمق معادله نفوذ کرده و جواب را ذره‌ذره استخراج می‌کنند.

! COMMON MISTAKE

گم شدن در جزئیات محاسباتی فاکتوریل‌ها و فراموش کردن اینکه کل این فرآیند، اثبات علت کارکردن تابع e^{at} بود.

خلاصه کلیدی و تله‌های رایج

درس-آموخته‌های کلیدی:

- ◆ معادله $x' = ax$ یعنی سرعت رشد متناسب با مقدار فعلی است.
- ◆ شرط اولیه (X_0) نقطه شروع ضروری برای هر پیش‌بینی است.
- ◆ سری توانی تابعی است که از بی‌نهایت چندجمله‌ای (t^n) ساخته می‌شود.
- ◆ مشتق سری توانی، توان را پایین می‌آورد و عدد ثابت اولیه را حذف می‌کند.
- ◆ تساوی دو سری یعنی ضرایب توان‌های مشابه دقیقاً با هم برابرند.
- ◆ مخرج فاکتوریل ($n!$) به دلیل مشتق‌گیری‌های متوالی ظاهر می‌شود.
- ◆ تابع e^{at} نام مستعاری برای پُرانتز بی $\left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots\right)$ است.

۳ تله رایج:

۱. ترس از بی‌نهایت: تصور اینکه باید بی‌نهایت مرحله را حل کنید. ۳-۴ مرحله برای کشف الگو کافیست.
۲. گم کردن متغیر مستقل: اشتباه گرفتن t (زمان) با ضرایب c . متغیر t دست‌نخورده می‌ماند.
۳. نادیده گرفتن شرط اولیه: قرار دادن $c_0 = 1$ پیش‌فرض، در حالی که c_0 حتماً به شرط فیزیکی (X_0) بستگی دارد.



GOLDEN RULES

۱. اگر دو چندجمله‌ای همیشه برابرند، ضرایب همتای آن‌ها حتماً برابرند.

۲. هر جا نرخ رشد متناسب با مقدار فعلی بود، رد پای e را خواهید یافت.

آزمون نهایی و مسیر آینده

پاسخنامه کوتاه:

- (۱) رشد متناسب با خود. (۲) چون مشتق‌گیری آن آسان‌ترین حالت ممکن است. (۳) کارت‌های هم‌جنس باید مقایسه شوند.
- (۴) ضریب اول (c_0) را می‌سازد. (۵) از پایین آمدن توان ۲ در مشتق مشتق‌گیری. (۶) محصول بسط تیلور است. (۷) ۴۵.
- (۸) $c_{n+1} = \frac{5}{n+1} c_n$ (۹) $2.5 (10.2 + 8t + 15t^2)$

نقشه راه مطالعه بعدی:

- موضوع ۱: سری‌های مک‌لورن در پایتون (کدنویسی توابع).
- موضوع ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم (حل حرکت پاندول با سری‌ها).
- موضوع ۳: توابع بسل (Bessel Functions) (وقتی e جوابگو نیست).

سوالات مفهومی و کاربردی:

۱. معادله $x' = ax$ چه مفهومی در دنیای واقعی دارد؟
۲. چرا در اثبات از سری توانی استفاده کردیم؟
۳. در تساوی دو سری، چرا ضرایب t^2 چپ را با t^1 راست مساوی نکردیم؟
۴. نقش شرط اولیه (X_0) در تعیین ضرایب سری چیست؟
۵. عدد ۲ در مخرج جمله $\frac{a^2 t^2}{2}$ چگونه تولید شد؟
۶. آیا تابع نمایی (e) قبل از سری‌های توانی وجود داشته است یا محصول آن‌هاست؟
۷. اگر باکتری‌ها از $x' = 3x$ با مقدار اولیه ۱۰ پیروی کنند، c_2 چند است؟
۸. در معادله $x' = 5x$ ، رابطه بازگشتی ضرایب چیست؟
۹. مشتق سری $3 + 2t + 4t^2 + 5t^3$ چیست؟
۱۰. با سه جمله اول بسط e^{at} ، مقدار تابع را در $t = 0.1$ برای $a = 10$ و $X_0 = 1$ تقریب بزنید.

! COMMON MISTAKE

جواد مردوخی در اینجا! این روش دروازه ورود به فیزیک کوانتوم و مهندسی پیشرفته است. مفاهیم را رها نکنید.