

$$\begin{Bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & -4 \\ 2 & 10 & 12 \end{Bmatrix}$$



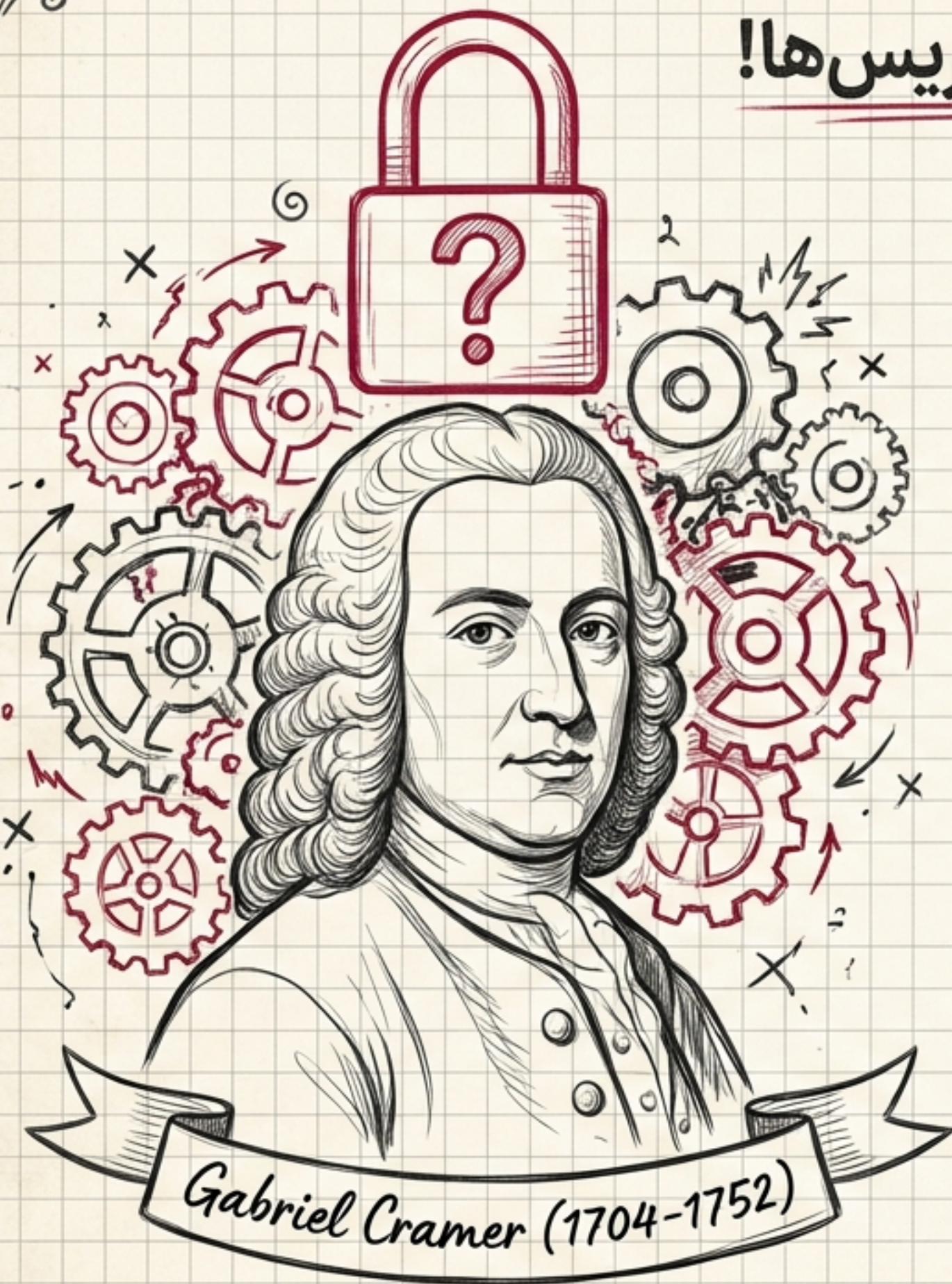
دترمینان و کاربردهای آن

به دفترچه یادداشت تحلیلی ما خوش آمدید! در این درسنامه، یاد می‌گیریم چگونه یک آرایه پیچیده از اعداد (ماتریس) را به یک «عدد منفرد و معنادار» تبدیل کنیم.

در این سفر خواهید آموخت:

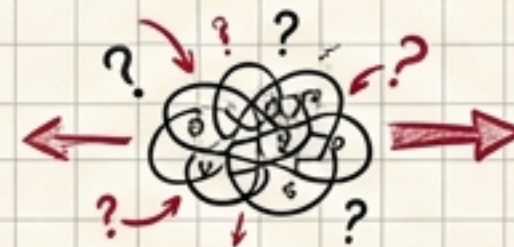
- تاریخچه پنهان دترمینان‌ها
- معنای هندسی و کاربردهای حیاتی
- تکنیک‌های بسط و محاسبه سریع

مقدمه و قلاب ذهنی: معمایی پیش از تولد ماتریس‌ها!



• [مسیر قرمز - چالش حقیقی]:

آیا می‌دانستید مفهوم **دترمینان** پیش از اختراع **ماتریس‌ها** متولد شده است؟! در نیمه اول قرن هجدهم، ریاضی‌دانان با دستگاه‌های معادلات خطی عظیم و درهم‌تنیده‌ای روبه‌رو بودند که حل آن‌ها به یک **بن‌بست محاسباتی** تبدیل شده بود.



• [مسیر آبی - پل تحلیلی]:

«گابریل کرامر» (ریاضی‌دان سوئیسی، ۱۷۵۲-۱۷۰۴) برای عبور از این بن‌بست، روشی ابداع کرد. او متوجه شد که ضرایب معادلات، الگوی خاصی می‌سازند که می‌توان به آن‌ها یک عدد نسبت داد. این ایده، دهه‌ها بعد به پیدایش مفهوم **ماتریس** منجر شد!

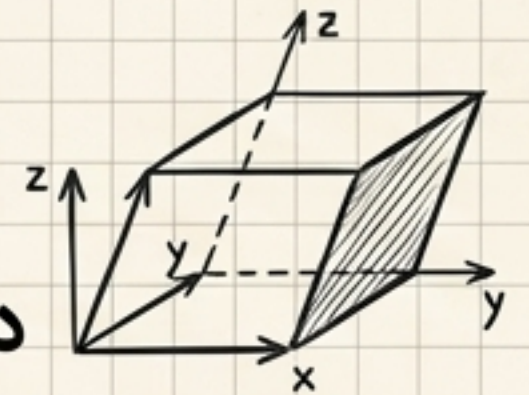
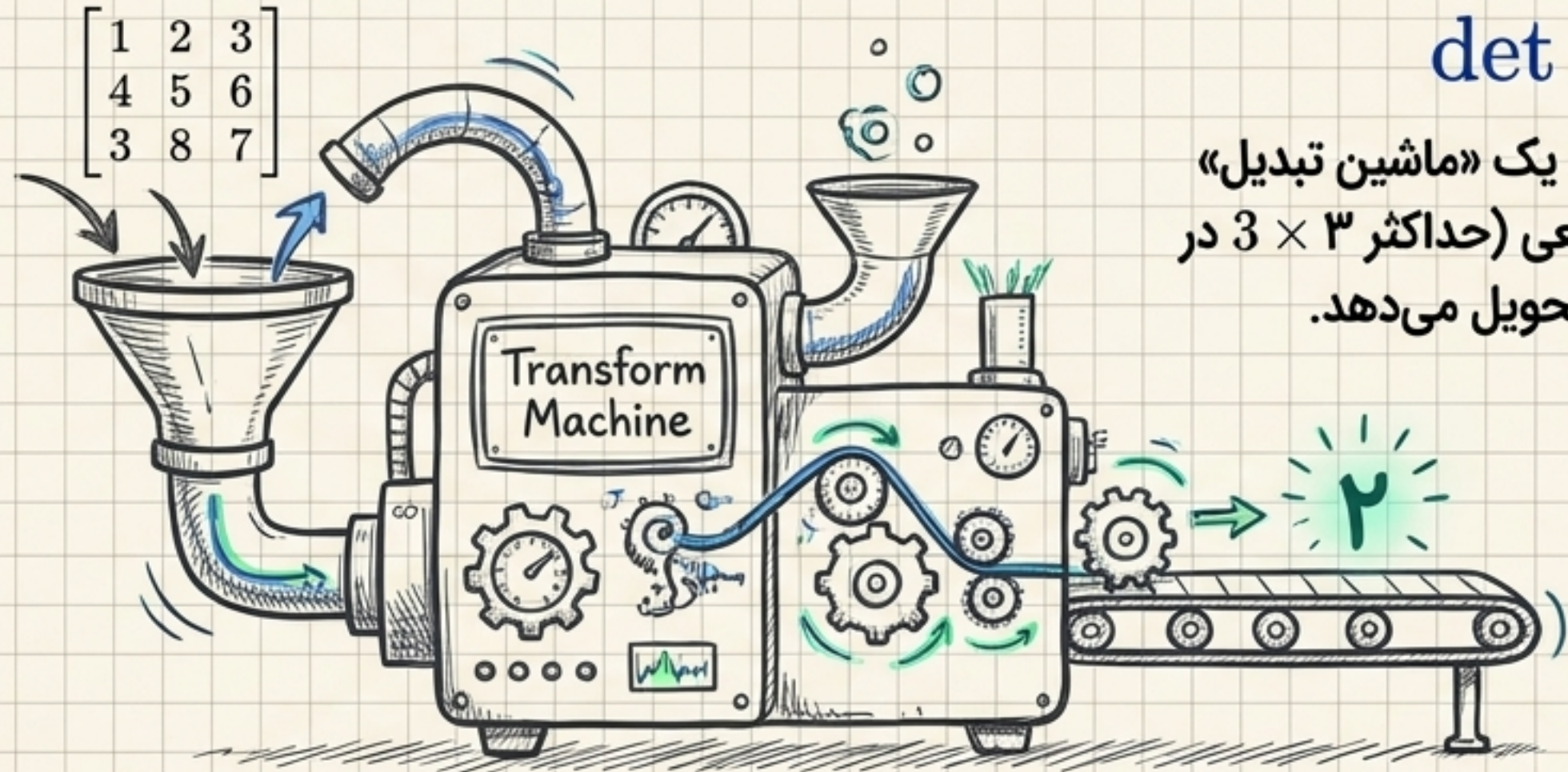


درسنامه: دترمینان دقیقاً چه کار می‌کند؟

پیش از غرق شدن در فرمول‌ها، بیایید نقشه راه را ببینیم. دترمینان صرفاً یک بازی با اعداد نیست؛ بلکه اطلاعات حیاتی درباره رفتار ماتریس به ما می‌دهد.

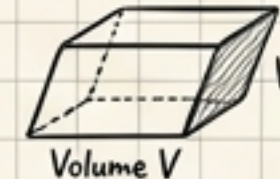
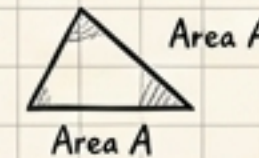
$$\det : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

[مسیر آبی- پل تحلیلی]: دترمینان را مانند یک «ماشین تبدیل» تصور کنید. این ماشین، یک ماتریس مربعی (حداکثر 3×3 در این درس) را می‌گیرد و یک عدد حقیقی تحویل می‌دهد.



در هندسه:

محاسبه مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع (دو بعدی)،
حجم متوازی‌السطوح (سه بعدی)، و حتی ضرب
خارجی بردارها!



در جبر:

نشان می‌دهد که آیا ماتریس وارون‌پذیر
است؟ (آیا دستگاه معادلات جواب دارد؟)



درسنامه: قدم اول در هزارتو (ماتریس‌های 1×1 و 2×2)

بیایید از ساده‌ترین حالت‌ها شروع کنیم و قانون اصلی را بسازیم.

• [مسیر قرمز - چالش حقیقی]:

چگونه عناصر یک ماتریس را با هم ترکیب کنیم که تمام درایه‌ها در عدد نهایی نقش داشته باشند؟

حالت اول (1×1): دترمینان ماتریس تک‌عضوی، دقیقاً همان عضو است!

$$A = [k] \Rightarrow |A| = k$$

حالت دوم (2×2): قانون ضرب ضربداری (قطر اصلی منهای قطر فرعی).

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the calculation of the determinant for a 2×2 matrix. A red arrow points from a to d with a $(+)$ sign, representing the main diagonal product. A blue arrow points from b to c with a $(-)$ sign, representing the anti-diagonal product.

ضرب عناصر قطر اصلی: $a \times d$

ضرب عناصر قطر فرعی: $b \times c$

$$|A| = ad - bc$$

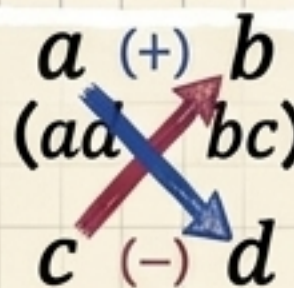
کارگاه حل مسئله: گرم کردن عضلات ریاضی

بیا یاد قوانین اساسی را روی اعداد پیاده کنیم (استخراج شده از منبع):

[مسیر سبز - کشف پاسخ]:

$$|A| = -7$$

[مسیر آبی - پل تحلیلی]: ماتریس 1×1 است. نیازی به محاسبه نیست، خود عدد خارج می‌شود. $A = [-7]$ (الف)

[مسیر آبی - پل تحلیلی]: استفاده از قانون ضربداری $(ad - bc)$  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (ب)

$$(2 \times 4) - (2 \times 4) = 8 - 8$$
 محاسبات:

[مسیر سبز - کشف پاسخ]:

$$|A| = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$
 پ)

$$(4 \times 4) - (2 \times 8) = 16 - 16$$
 محاسبات:

[مسیر سبز - کشف پاسخ]:

$$|A| = 0$$



نکته مخفی:
دقت کردید؟

وقتی سطرها یا ستون‌ها
مضربی از هم باشند،
ماشین دترمینان عدد صفر
را تولید می‌کند!

کارگاه حل مسئله: ترکیب جبر و مثلثات

[مسیر قرمز - چالش حقیقی]:

اگر درایه‌های ماتریس عدد نباشند و توابع مثلثاتی باشند چه؟ آیا قانون تغییر می‌کند؟

$$A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

سوال منبع: دترمینان ماتریس زیر را بیابید:

[مسیر آبی - پل تحلیلی]:

خیر! ساختار ریاضی بی نقص است. همان قانون $ad - bc$ را اجرا می‌کنیم و سپس از اتحادهای مثلثاتی برای ساده‌سازی کمک می‌گیریم.

ضرب قطر اصلی: $\sin \alpha \times \sin \alpha = \sin^2 \alpha$

ضرب قطر فرعی: $\cos \alpha \times (\cos \alpha) = -\cos^2 \alpha$

جرقه ذهنی: فرمول اصلی تفریق است، پس منفی قطر فرعی مثبت می‌شود!

محاسبات: $\sin^2 \alpha - (-\cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

[مسیر سبز - کشف پاسخ] بر اساس اتحاد طلایی مثلثات، پاسخ نهایی برابر است با: $|A| = 1$

درسنامه: ورود به هزارتوی 3×3 و روش بسط

[مسیر قرمز - چالش حقیقی]:

برای ماتریس 3×3 ، قطر اصلی و فرعی دیگر تمام اعداد را پوشش نمی‌دهند. ما به یک روش سیستماتیک نیاز داریم تا ماتریس بزرگ را به ماتریس‌های کوچکتر (2×2) بشکنیم.

[مسیر آبی - پل تحلیلی]: روش «بسط بر حسب سطر یا ستون». شما می‌توانید هر سطر یا هر ستونی را به عنوان «مسیر» انتخاب کنید. دترمینان در نهایت یک عدد ثابت خواهد بود.

الگوریتم بسط:

۱. یک سطر یا ستون را انتخاب کنید.
۲. روی درایه اول آن بایستید. سطر و ستون آن درایه را حذف کنید (خط بزنید).
۳. یک ماتریس 2×2 باقی می‌ماند! دترمینان آن را در درایه‌ای که رویش ایستاده‌اید ضرب کنید.
۴. این کار را برای تمام درایه‌های آن سطر/ستون تکرار کنید و با رعایت «الگوی علامت‌ها» با هم جمع کنید.

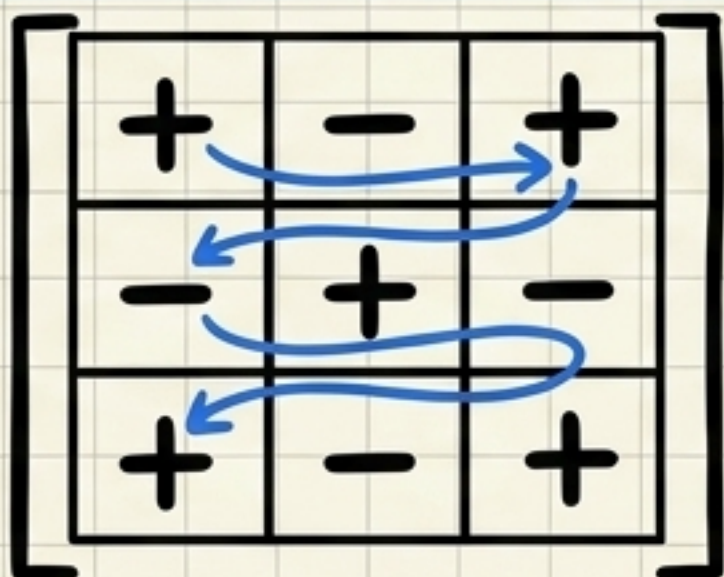
a	b	c
d	e	f
g	h	i

e	f
h	i

ماتریس کوچکتر
(2×2)

تکنیک کلیدی: نقشه علامت‌ها (کدگذاری مثبت و منفی)

[مسیرآبی-پل تحلیلی]: در الگوریتم بسط، هر جایگاه در ماتریس یک علامت ذاتی دارد که باید در محاسبات لحاظ شود. این علامت‌ها مانند صفحه شطرنج یکی در میان مثبت و منفی هستند. همیشه از گوشه بالا سمت چپ با (+) شروع کنید.



+	-	+
-	+	-
+	-	+

فرمول کلی بسط بر حسب سطر اول:

$$|A| = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

کارگاه حل مسئله: اثبات انعطاف پذیری بسط (مسیر اول)

برای اثبات اینکه مسیر انتخابی تأثیری در جواب نهایی ندارد، یک ماتریس را از دو مسیر مختلف حل می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

مسیر انتخابی اول: بسط بر حسب سطر اول

درایه‌های سطر اول: 1، -1، 2

اعمال الگوی علامت: (+2)، (-(-1))، (+2)

محاسبات (دقیقاً مطابق منبع):

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(0 - 12) + 1(0 + 6) + 2(8 + 2)$$

$$|A| = -12 + 6 + 20 \quad |A| = 14 \quad \text{[مسیر سبز - کشف پاسخ]}$$

(مستندات دفترچه: توجه کنید که منبع در اینجا اعداد داخل پرانتز دوم و سوم را با تغییر علامت محاسبه کرده تا به ساختار نهایی برسد!)

کارگاه حل مسئله: اثبات انعطاف پذیری بسط (مسیر دوم)

حالا همان ماتریس را از یک مسیر کاملاً متفاوت حل می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

مسیر انتخابی دوم: بسط بر حسب ستون سوم

محاسبات:

$$|A| = +2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(8 + 2) - 3(4 - (-2)) + 0$$

$$|A| = 2(10) - 3(6) + 0 \quad (\text{تطابق دقیق با اعداد منبع})$$

$$|A| = 20 - 18 + 0$$

$$|A| = 14 \quad [\text{مسیر سبز - کشف پاسخ}]$$

• درایه های ستون سوم: 2 ، 3 ، 0

• اعمال الگوی علامت ستون سوم
(+0) ، (-3) ، (+2)



نتیجه گیری درخشان: مسیرها متفاوت بودند،
اما مقصد دقیقاً یکسان است!

تکنیک فوق حرفه‌ای: میان بر «صفر»

مسیر قرمز - چالش حقیقی:

محاسبه سه دترمینان 2×2 برای یک ماتریس 3×3 زمان بر است و احتمال خطای محاسباتی را بالا می‌برد.

آیا راهی برای فرار از این محاسبات طولانی وجود دارد؟

مسیر آبی - پل تحلیلی:

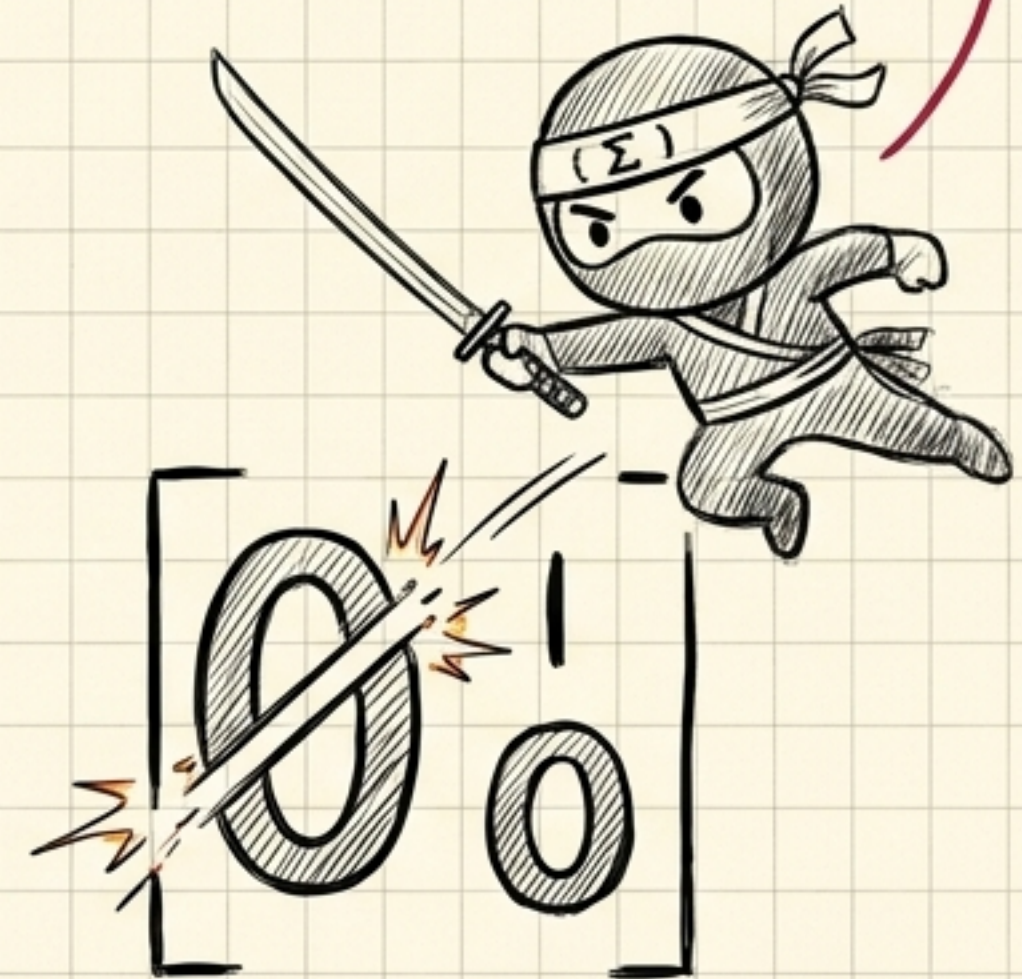
به یاد بیاورید که درایه‌های سطر/ستون انتخابی، در دترمینان‌های کوچکتر ضرب می‌شوند.

چه عددی است که ضرب در آن، هر چیزی را نابود (صفر) می‌کند؟ بله، صفر!

قانون طلایی (تذکر منبع):

همان‌طور که دیدیم نتیجه بسط از تمام سطرها و ستون‌ها یکسان است. پس هوشمندانه‌ترین کار این است:

دترمینان را همواره برحسب سطر یا ستونی بسط دهید که بیشترین تعداد «صفر» را دارد. هر صفر، یک مرحله از محاسبات شما را کاملاً حذف می‌کند!



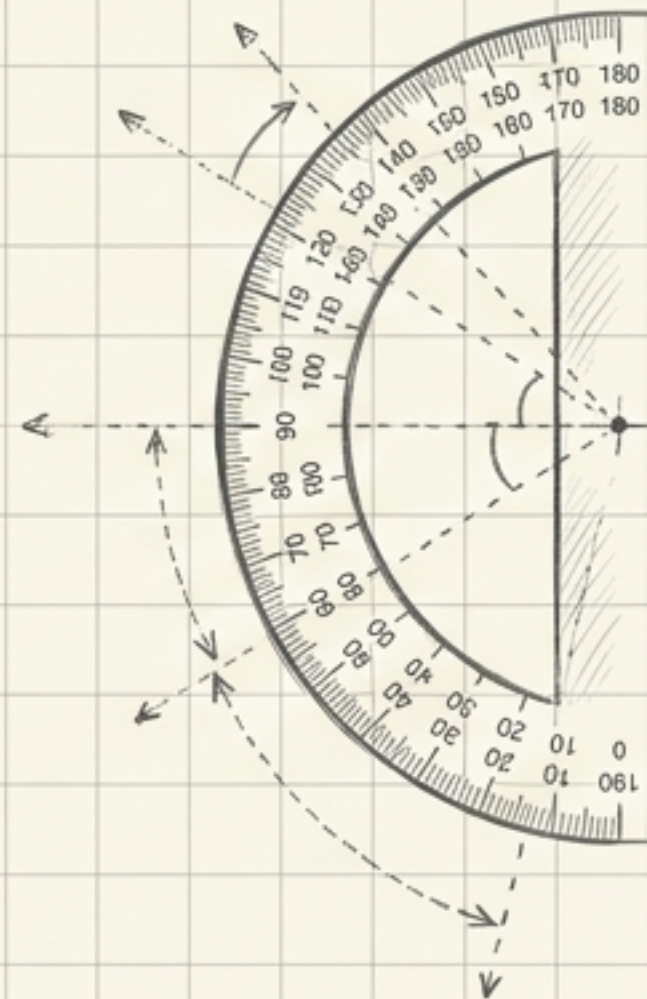
• دفترچه کار آگاه هندسه: راز کشف «مکان‌های هندسی» در صفحه



به پرونده مکان‌های هندسی خوش آمدید. در اینجا ما
نقاط گمشده را با استفاده از سرنخ‌های ریاضی ردیابی
می‌کنیم. هیچ‌ای نمی‌تواند از قوانین منطق فرار کند!



case solved



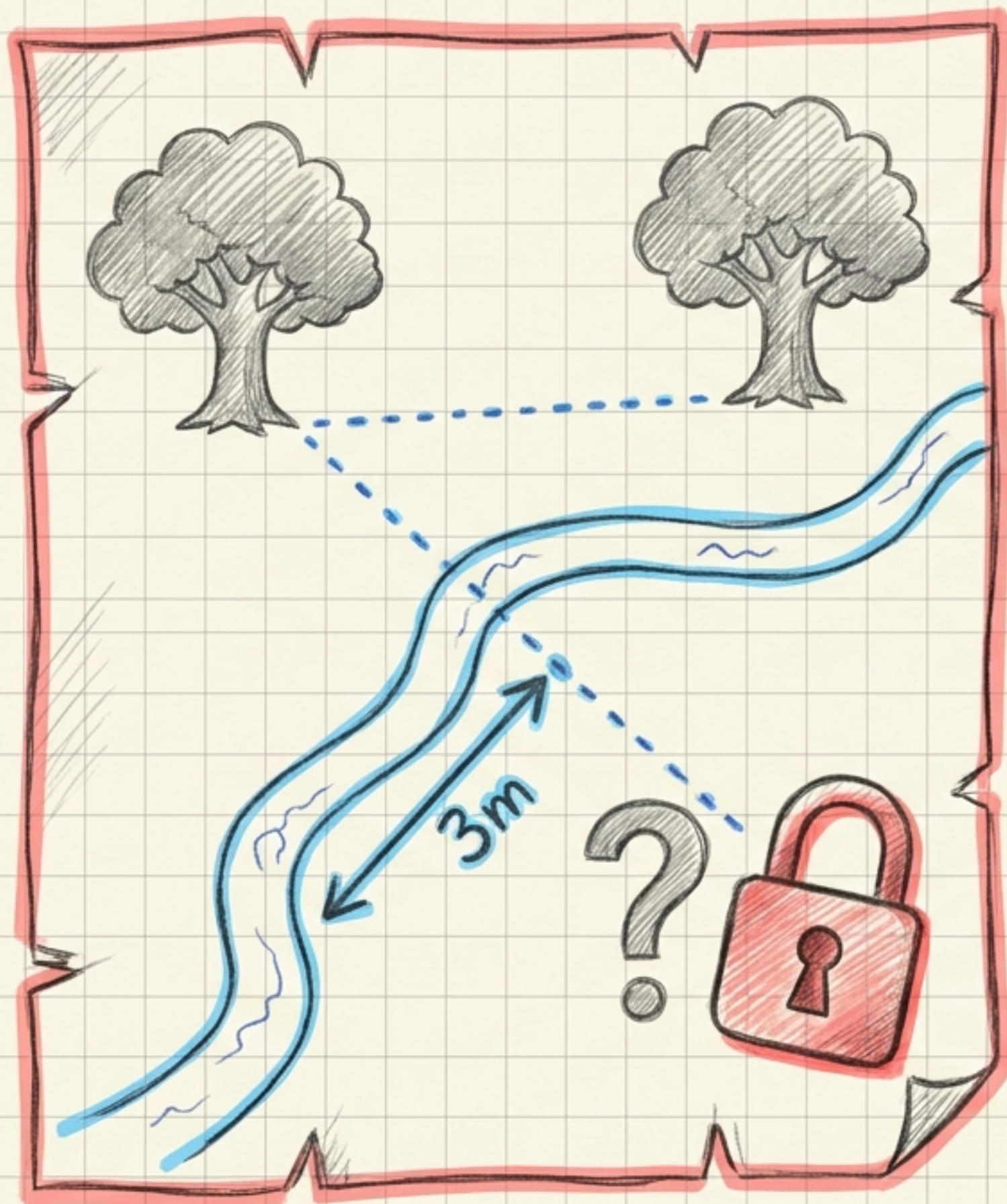
معما را حل کن: گنج کجاست؟



تصور کنید در یک نقشه گنج، به شما گفته شده: «**گنجینه**، نقطه‌ای است که همزمان از **دو درخت بلوط** به یک فاصله است و دقیقاً **۳ متر** با رودخانه فاصله دارد». آیا این گنج وجود دارد؟ اگر بله، کجاست؟

در هندسه، ما مدام با این بن‌بست روبه‌رو می‌شویم که یافتن یک نقطه با تکیه بر حدس و گمان غیرممکن است. ما مجموعه‌ای از نقاط بی‌نهایت در صفحه داریم و پیدا کردن نقطه‌ای که «شرایط خاصی» را ارضا کند، نیازمند یک یک نقشه راه است. به این مجموعه نقاط که یک ویژگی مشترک دارند، مکان هندسی می‌گویند.

چگونه این قفل را باز کنیم؟ با شناختن **۴ ابزار اصلی مکان هندسی** در اسلایدهای بعدی!



۴ سرنخ طلایی هندسه (بخش اول)

برای یافتن مزنون (نقطه مورد نظر)، باید ردپاهای استاندارد را بشناسیم. این قوانین تغییرناپذیرند:



مسیر آبی - پل تحلیلی:

سرنخ ۱: فاصله برابر از دو نقطه ثابت A و B

تحلیل: برای برقراری عدالت بین دو نقطه، باید روی خطی بایستیم که دقیقاً از وسط آن‌ها می‌گذرد و بر پاره‌خط رابط عمود است.

کشف قانون: مکان هندسی، عمود منصف پاره‌خط AB است.



سرنخ ۲: فاصله برابر از دو ضلع یک زاویه

تحلیل: برای حفظ فاصله برابر از دو دیوار متقاطع (اضلاع زاویه)، باید دقیقاً در وسط فضای بین آن‌ها حرکت کنیم.

کشف قانون: مکان هندسی، نیمساز آن زاویه است.



۴ سرنخ طلایی هندسه (بخش دوم)

ادامه ابزارهای کارآگاهی ما برای ردیابی نقاط در صفحه:



مسیر آبی - پل تحلیلی:



سرنخ ۴: فاصله ثابت k از یک خط مستقیم d

تحلیل:

اگر بخواهید به موازات یک رودخانه (خط d) با فاصله مشخصی راه بروید، می‌توانید در هر دو سمت رودخانه این کار را بکنید.

کشف قانون:

مکان هندسی، دو خط موازی با d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.



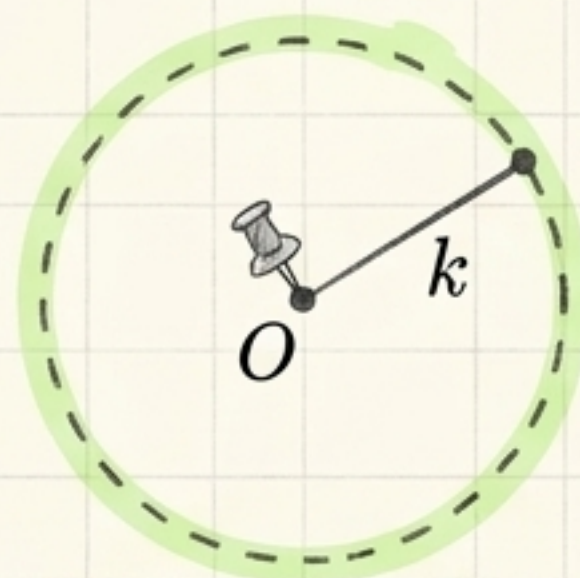
سرنخ ۳: فاصله ثابت k از یک نقطه ثابت O

تحلیل:

اگر نقطه‌ای را با یک طناب به طول k به میخ O ببندیم و بچرخانیم، چه مسیری طی می‌شود؟

کشف قانون:

مکان هندسی، دایره‌ای به مرکز O و شعاع k است.

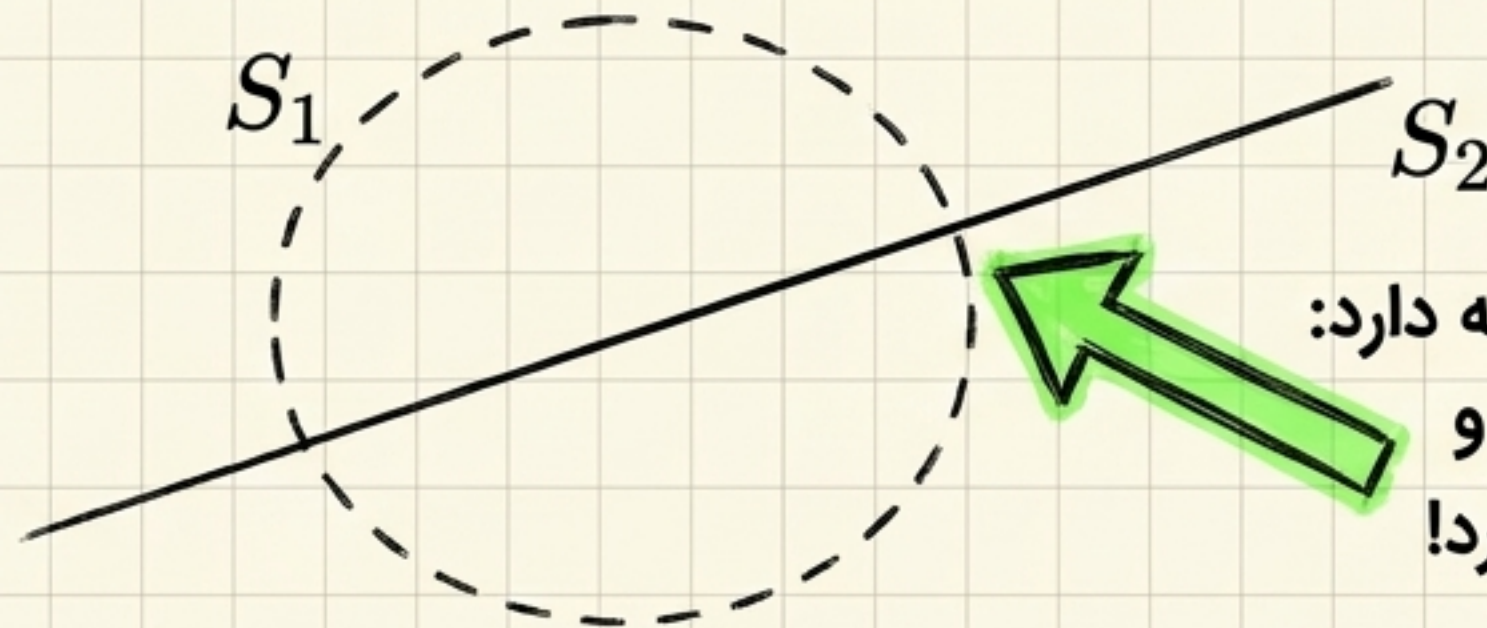


استراتژی اصلی: تلاقی سرنخ‌ها

مسائل واقعی هندسه به ندرت فقط یک ویژگی دارند. معمولاً ما با ترکیب محدودیت‌ها روبه‌رو هستیم و باید نقطه‌ای را پیدا کنیم که همه شرایط را همزمان داشته باشد.

بدیهی است که اگر ویژگی اول مکان هندسی S_1 را بسازد و ویژگی دوم مکان هندسی S_2 را بسازد، مجموعه نقاطی که هر دو ویژگی را با هم دارند، دقیقاً در محل برخورد (تقاطع) این دو مکان هندسی قرار دارند.

$$\text{\$ پاسخ} = S_1 \cap S_2$$



استراتژی ما همیشه دو مرحله دارد:
رسم جداگانه S_1 و S_2 ، و
و سپس یافتن محل برخورد!



کالبدشکافی یک پرونده حل شده: طرح مسئله

بیایید به عنوان یک کارآگاه، یک پرونده کلاسیک را موشکافی کنیم:

صورت مسئله:

دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d نیز به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

A

B

d

ما یک **نقطه مجهول** داریم که در فضایی بی نهایت گم شده است. اما دو قفل (محدودیت) مجزا روی آن قرار دارد. ذهن در ابتدا گیج می شود که از کجا شروع کند؟ آیا باید نقاطی را حدس بزنیم و با خطکش اندازه بگیریم؟ خیر!

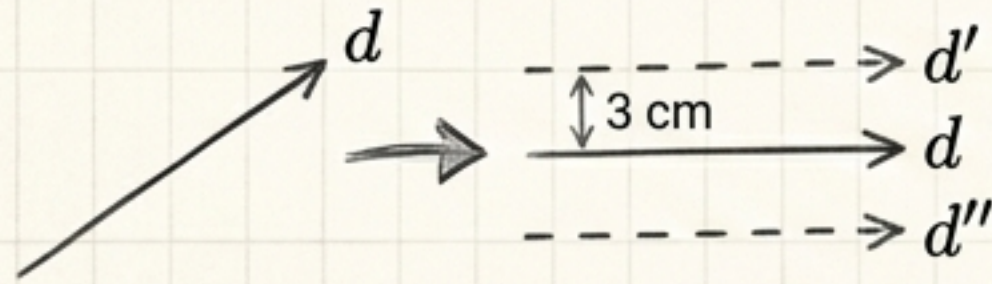
به عنوان یک هندسه دان، ما این کلاف را در اسلاید بعد باز می کنیم.

کالبدشکافی پرونده: گشایش و تحلیل

ترجمه مسئله به مکان‌های هندسی: ما باید این پرونده را بر اساس قانون $S_1 \cap S_2$ به دو مکان هندسی مجزا تجزیه کنیم.

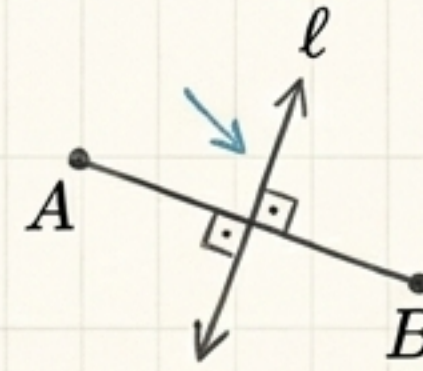
گام دوم (S_2)

«از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.»
طبق سرنخ شماره ۴ در جعبه‌ابزار ما، این مکان هندسی شامل دو خط موازی با d در دو طرف آن و به فاصله ۳ سانتی‌متر است. نام آنها را d' و d'' می‌گذاریم.



گام اول (S_1)

«از A و B به یک فاصله باشد.»
طبق سرنخ شماره ۱ در جعبه‌ابزار ما، مکان هندسی این نقاط، عمود منصف پاره‌خط AB است. نام این خط را l می‌گذاریم.



جرقه ذهنی: حالا نقطه مجهول ما باید هم روی خط l باشد و هم روی یکی از خطوط d' یا d'' !



کالبدشکافی پرونده: کشف پاسخ و بحث در جواب

یافتن محل تقاطع:

یافتن محل تقاطع: نقطه برخورد خط l با دو خط d' و d'' ، نقاط M_1 و M_2 را به ما می‌دهد که جواب‌های قطعی مسئله هستند.

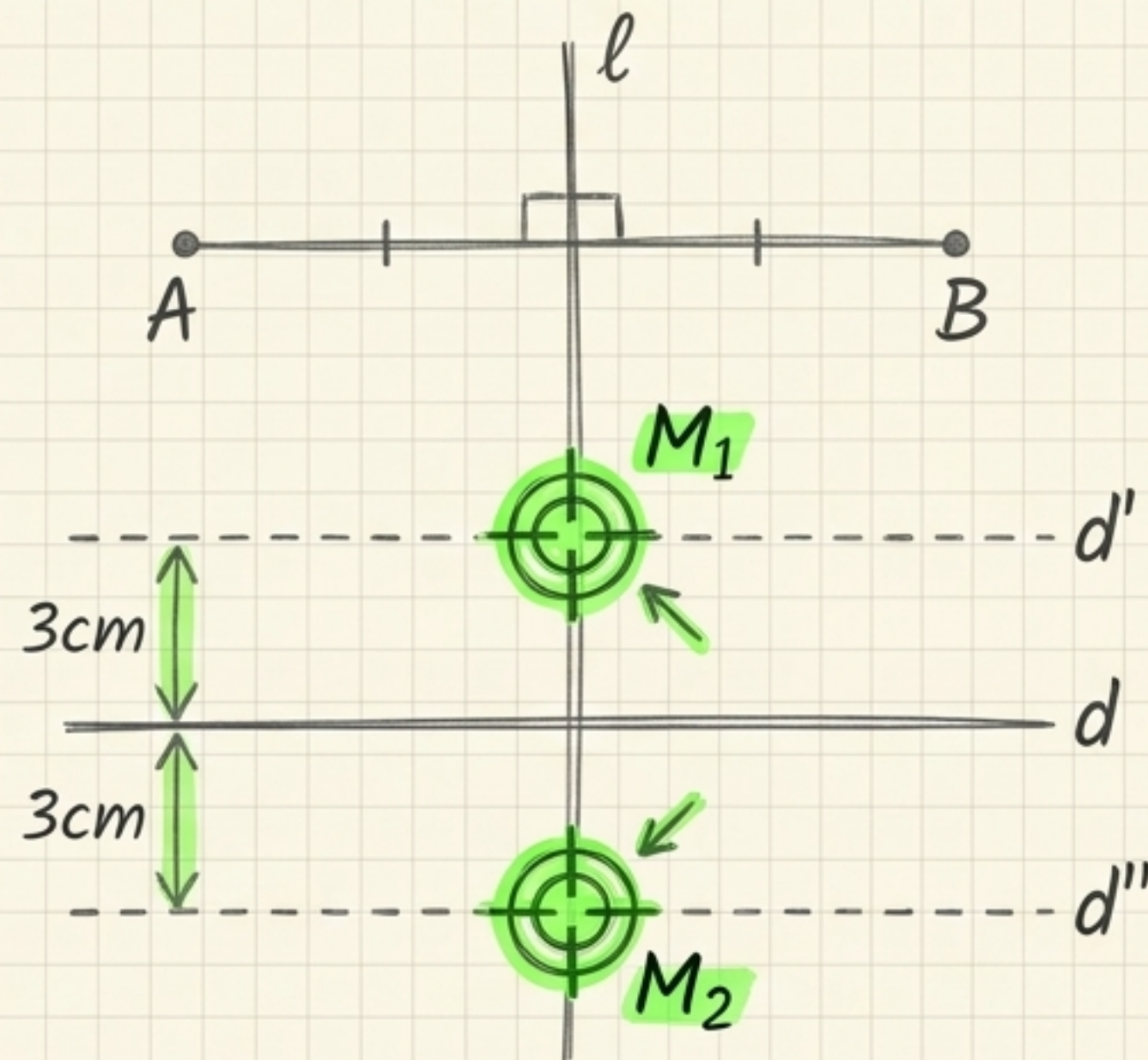
بحث در وجود جواب (چرایی فرآیند):



چرا نمی‌گوییم این مسئله همیشه دو جواب دارد؟ چون رفتار خطوط نسبت به هم در صفحه متغیر است!

- ۲ جواب: اگر خط l ، خطوط موازی d' و d'' را قطع کند (حالت استاندارد و شکل روبه‌رو).
- بدون جواب: اگر خط l با دو خط d' و d'' کاملاً موازی باشد (هیچ تقاطعی رخ ندهد).
- بی‌شمار جواب: اگر خط l دقیقاً بر یکی از خطوط d' یا d'' منطبق شود (تمام نقاط روی خط، جواب خواهند بود).

راه حل نهایی پرونده



جعبه ابزار ذهنی کارآگاه

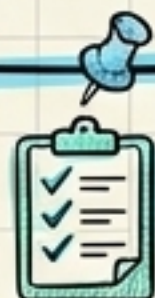
پیش از ورود به حل تمرینات مستقل، این چهار قانون طلایی را در ذهن خود سنجاق کنید:



تجزیه مسئله: شکستن شروط مرکب مسئله به مکان‌های هندسی مجزا و پایه (استخراج S_1 و S_2).



مکان هندسی (LOCUS): مجموعه تمام نقاطی که یک یا چند ویژگی مشترک دارند.



بحث در جواب: بررسی حالت‌های مختلف برخورد اشکال هندسی (موازی بودن، مماس بودن، متقاطع بودن) که تعداد جواب‌ها (صفر، یک، دو یا بی‌نهایت) را تعیین می‌کند.



اشتراک‌گیری ($S_1 \cap S_2$): یافتن تقاطع شکل‌های رسم شده برای رسیدن به جواب نهایی.

اکنون نوبت شماست که وارد میدان شوید. پرونده‌های باز منتظر شما هستند!

پرونده‌های باز (شماره ۱): مکان‌یابی پایه

مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

.....

.....

.....

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

.....

.....

.....

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

.....

.....

.....

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه مماس خارجی‌اند.

.....

.....

.....

پرونده‌های باز (شماره ۲): توازن چهارگانه

سوال ۲- نقاط A ، B ، C و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

 فضای کارآگاهی شما برای تحلیل و رسم: (راهنما: می‌توانید:

(راهنما: آیا می‌توانید دو عمود منصف مجزا رسم کنید و وضعیت تقاطع آن‌ها را در حالت‌های مختلف بسنجید؟)

A

B

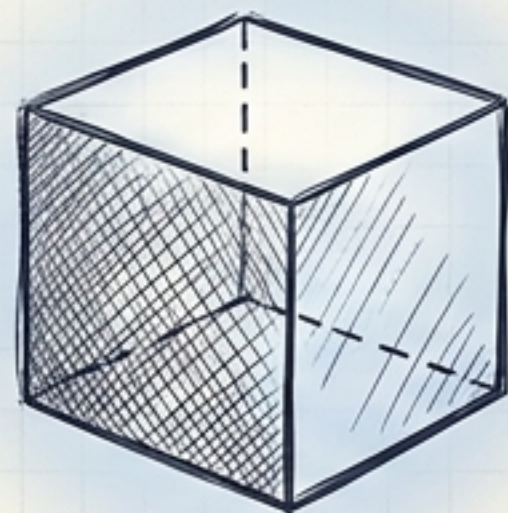
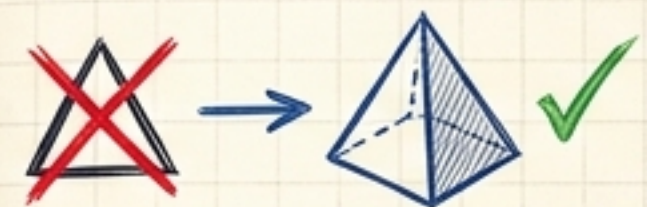
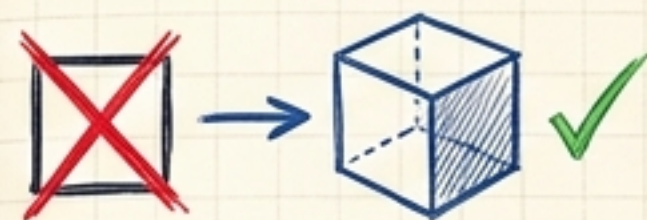
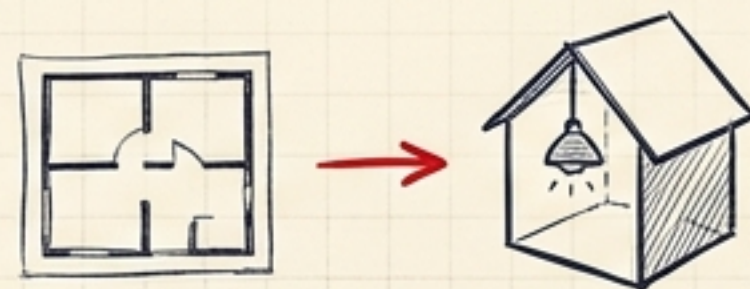
C

D

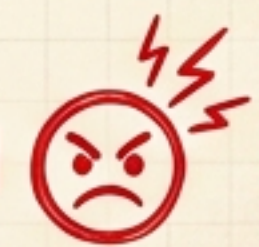
خروج از سرزمین تخت: معماری فضای سه بعدی (R^3)

مقدمه و قلاب ذهنی (Engage):
طرح مسئله قفل شده

روی یک برگ کاغذ مسطح، فقط می توانیم
مساحت یک خانه را بکشیم. اما اگر بخواهیم
ارتفاع سقف، حجم اتاق و موقعیت دقیق یک
لوستر معلق در هوا را به زبان ریاضی بیان
بیان کنیم، چه ابزاری داریم؟



[مسیر قرمز - چالش حقیقی]: دستگاه مختصات دوبعدی (دکارتی) فقط طول و عرض را می فهمد.
ما برای توصیف دنیای واقعی به یک بن بست رسیده ایم؛ ما به بعد سوم نیاز داریم!



تولد بُعد سوم (کنج اتاق)

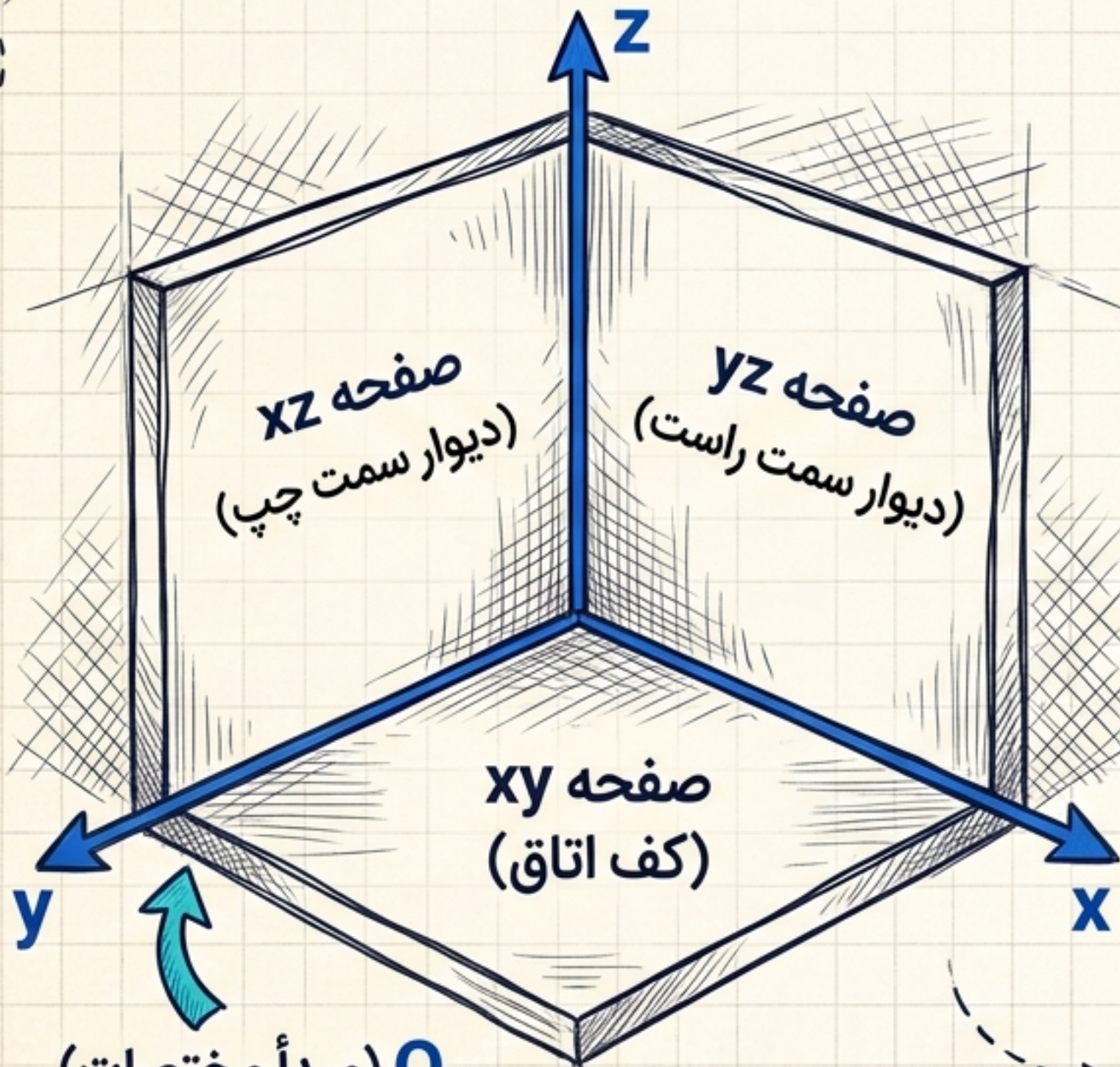
درسنامه خودخوان: —
برای شکستن قفل دنیای دوبعدی،
باید یک محور جدید بسازیم.

👁 [مسیر آبی - پل تحلیلی]:

تصور کنید دستگاه مختصات xy کف یک اتاق است.
حالا یک محور جدید (محور z ها) را دقیقاً عمود بر این
کف، رو به بالا رسم می‌کنیم. این تقاطع سه‌گانه
این تقاطع سه‌گانه شبیه به کنج یک اتاق است.

⚙ قرارداد ریاضی: فضای سه‌بعدی را با نماد $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم.

✓ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$



نقشه‌کشی هشت‌گانه فضا (Octants)

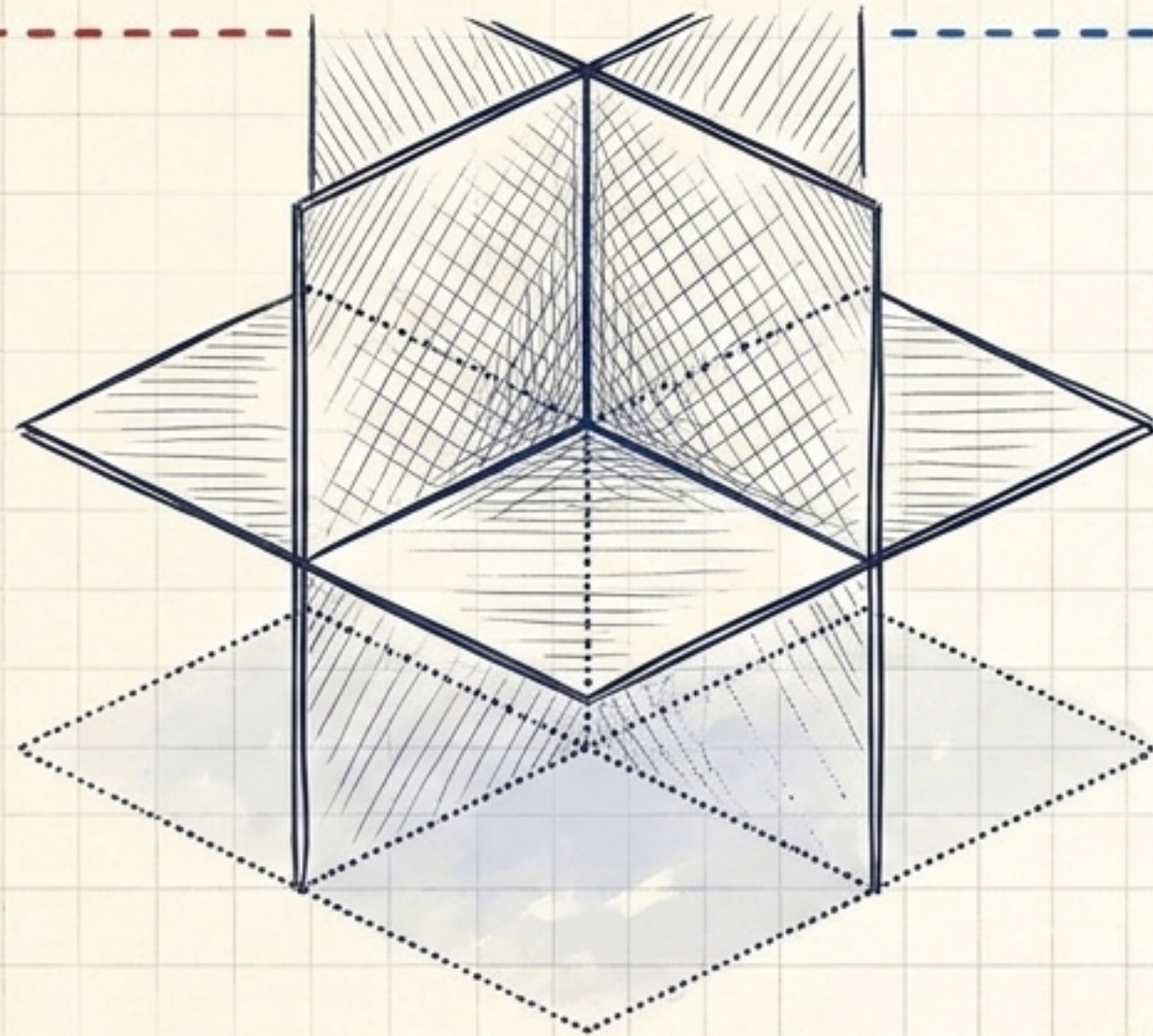
مسیر قرمز!:

در صفحه دوبعدی، محورها فضا را به ۴ ربع تقسیم می‌کردند. در فضای سه‌بعدی فضا چند تکه می‌شود؟
مسیر آبی! اگر محورها را از مبدأ (0) در مقادیر منفی ادامه دهیم، فضا به ۸ ناحیه (اتاقک) مجزا تقسیم می‌شود!

شماره‌گذاری استاندارد نواحی (بالای صفحه xy):

ناحیه ۱:	x, y, z همه مثبت	$(+, +, +)$
ناحیه ۲:	x منفی، بقیه مثبت	$(-, +, +)$
ناحیه ۳:	x و y منفی، z مثبت	$(-, -, +)$
ناحیه ۴:	x مثبت، y منفی، z مثبت	$(-, -, +)$

(نواحی ۵ تا ۸ دقیقاً زیر همین نواحی با z منفی تکرار می‌شوند)



شکار یک نقطه در فضا: تکنیک دو مرحله‌ای

چگونه نقطه $P(2, 4, 1)$ را در فضا پیدا کنیم؟

مسیر آبی: فرآیند را به دو مرحله ساده بشکنیم:

گام اول (روی زمین):
ابتدا ارتفاع را
نادیده بگیرید.

$(2, 4)$

$(2, -1)$

x

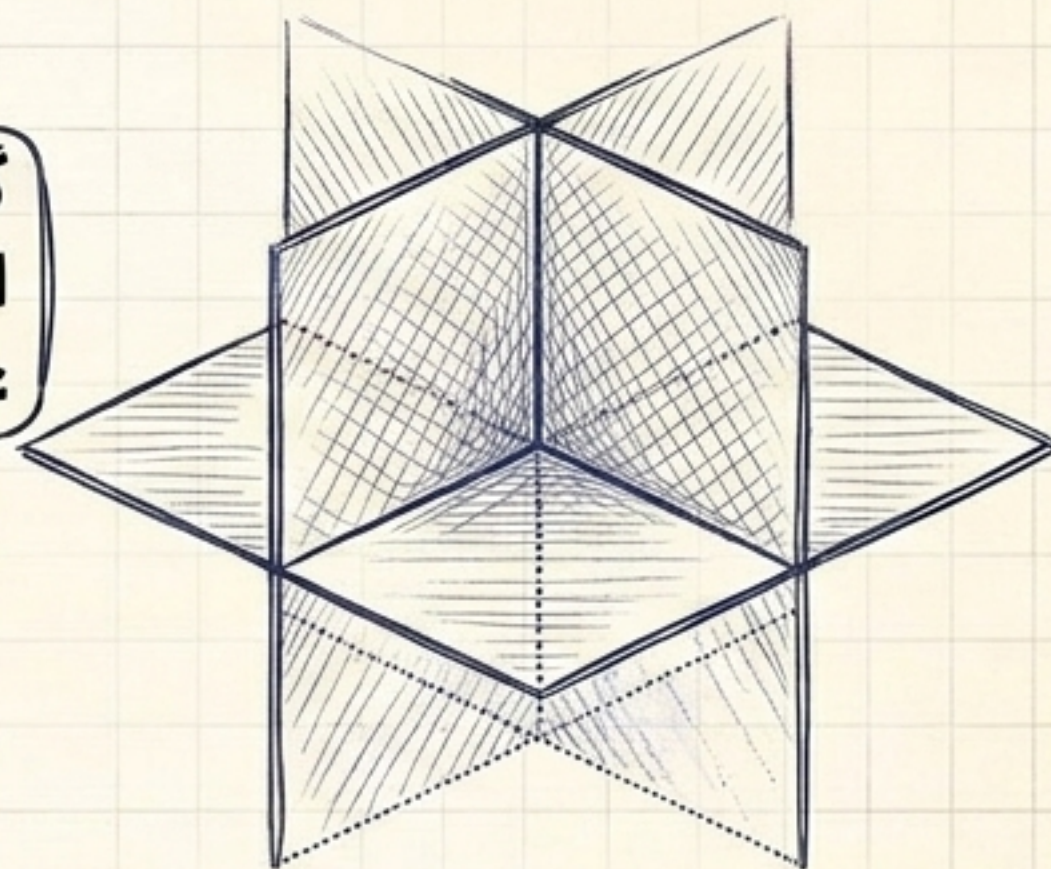
y

$x = 2$

$P(2, 4, 1)$

۱ واحد
به بالا

گام دوم (پرواز): به
اندازه ۱ واحد به صورت
عمودی پرواز کنید!



دیدگاه صفحات متقاطع (کشف عمیق‌تر):

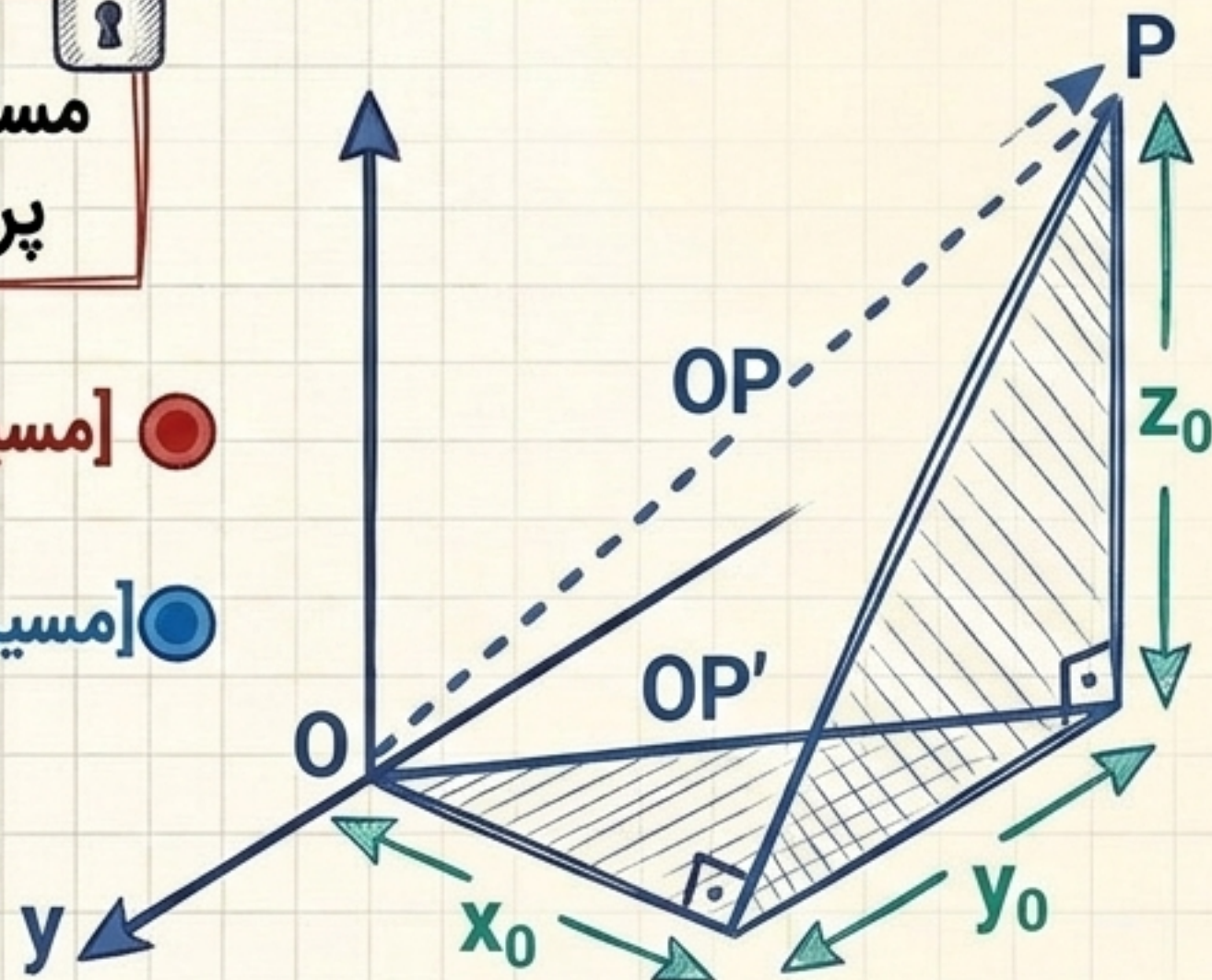
نقطه P محل برخورد قطعی سه صفحه نامرئی است: صفحه‌ای موازی yz ،
صفحه‌ای موازی xz ، و صفحه‌ای موازی xy .

متر کردن فضا (فیثاغورس دوگانه)

مسئله قفل‌شده: اگر پرنده‌ای از مبدأ (O) تا نقطه P پرواز کند، طول مسیر چقدر است؟

● [مسیر قرمز]: فیثاغورس فقط برای دوبعدی کار می‌کند!

● [مسیر آبی]: چه می‌شود اگر فیثاغورس را دو بار اجرا کنیم؟



دو بار!

فیثاغورس اول (روی کف):

$$|OP'|^2 = x_0^2 + y_0^2$$

فیثاغورس دوم (در فضا):

$$|OP|^2 = |OP'|^2 + z_0^2$$

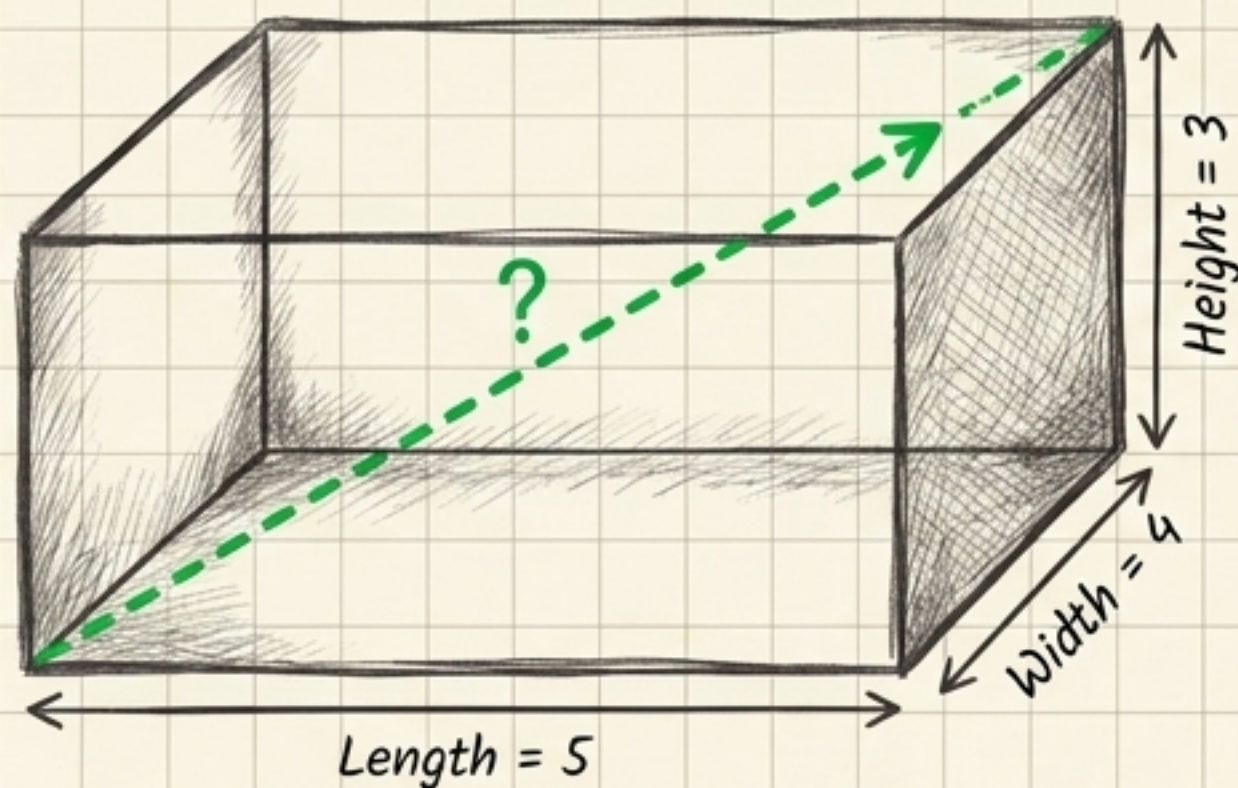
تعمیم بزرگ (فاصله هر دو نقطه P و Q):

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

حل مسئله - شکار قطر اتاق

سوال:

اتاقی به طول ۵ متر، عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر. طول قطر این اتاق چقدر است؟



[مسیر آبی]:

● گام اول: محاسبه قطر مستطیل کف

$$\text{قطر کف} \quad \sqrt{5^2 + 4^2} = 25 + 16 = \sqrt{41}$$

● گام دوم: استفاده از ارتفاع

$$\text{قطر اتاق} \quad \sqrt{41 + 3^2} = 41 + 9 = \sqrt{50}$$

● [مسیر سبز - کشف پاسخ]:

$$\text{قطر اتاق} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \text{ متر}$$



هندسه معادلات (وقتی یک حرف غایب است!)

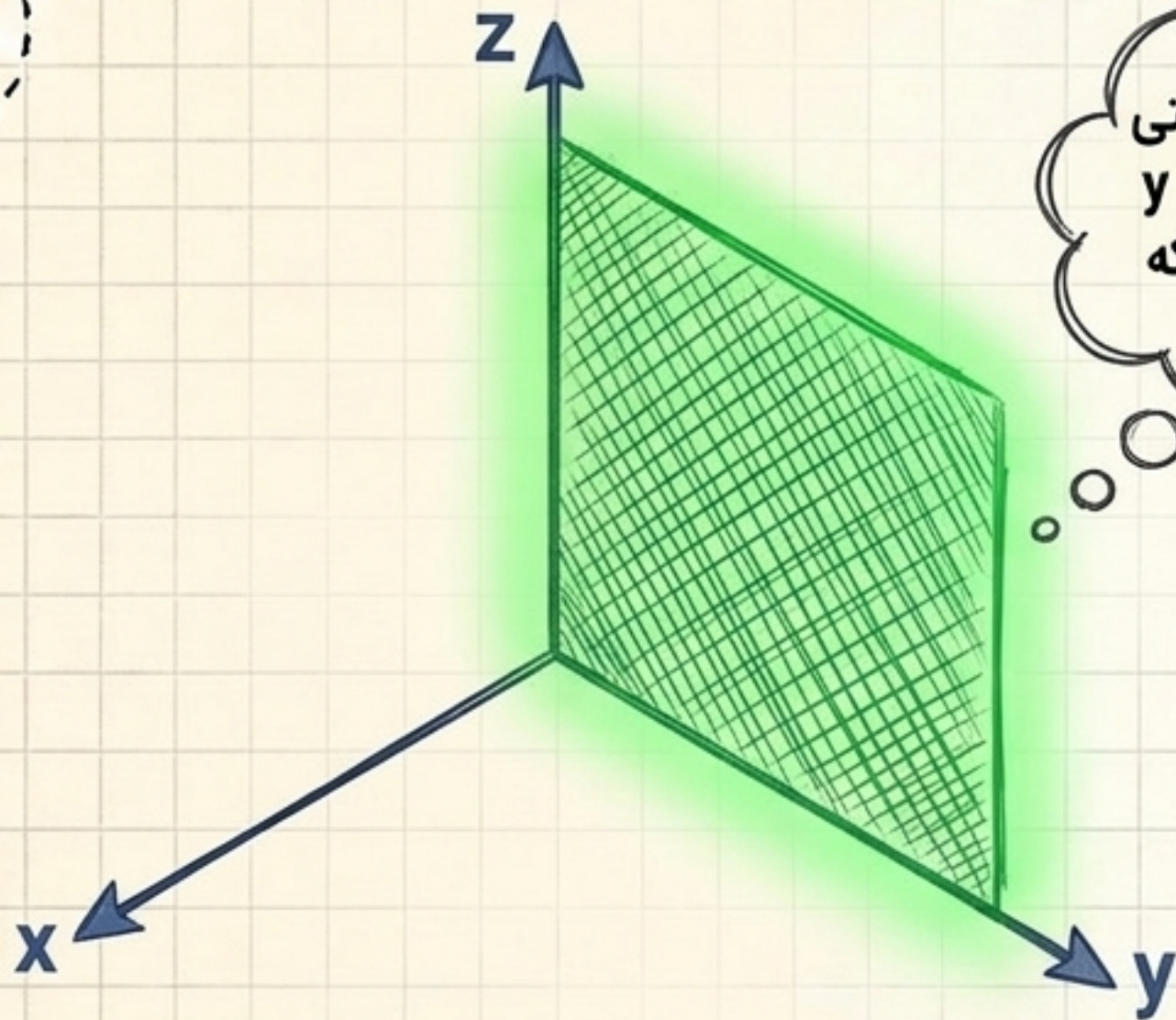
مسئله قفل شده: معادله ساده‌ای مثل $x=0$ در فضای سه بعدی چه شکلی دارد؟

● [مسیر قرمز]: ذهن فریب می‌خورد و فکر می‌کند $x=0$ فقط یک نقطه (مبدأ) است!

● [مسیر آبی]: نقاطی مثل $(0,0,0)$ ، $(0,1,2)$ یا $(0,-3,-1)$ همگی جواب هستند.

● [مسیر سبز]: با کنار هم قرار دادن بی‌نهایت نقطه‌ای که x آن‌ها صفر است، دقیقاً تمام صفحه yz ساخته می‌شود! پس $x=0$ معادله یک صفحه کامل است.

معادله هیچ محدودیتی برای y و z ندارد! هر y و هر z به شرطی که $x=0$ باشد.



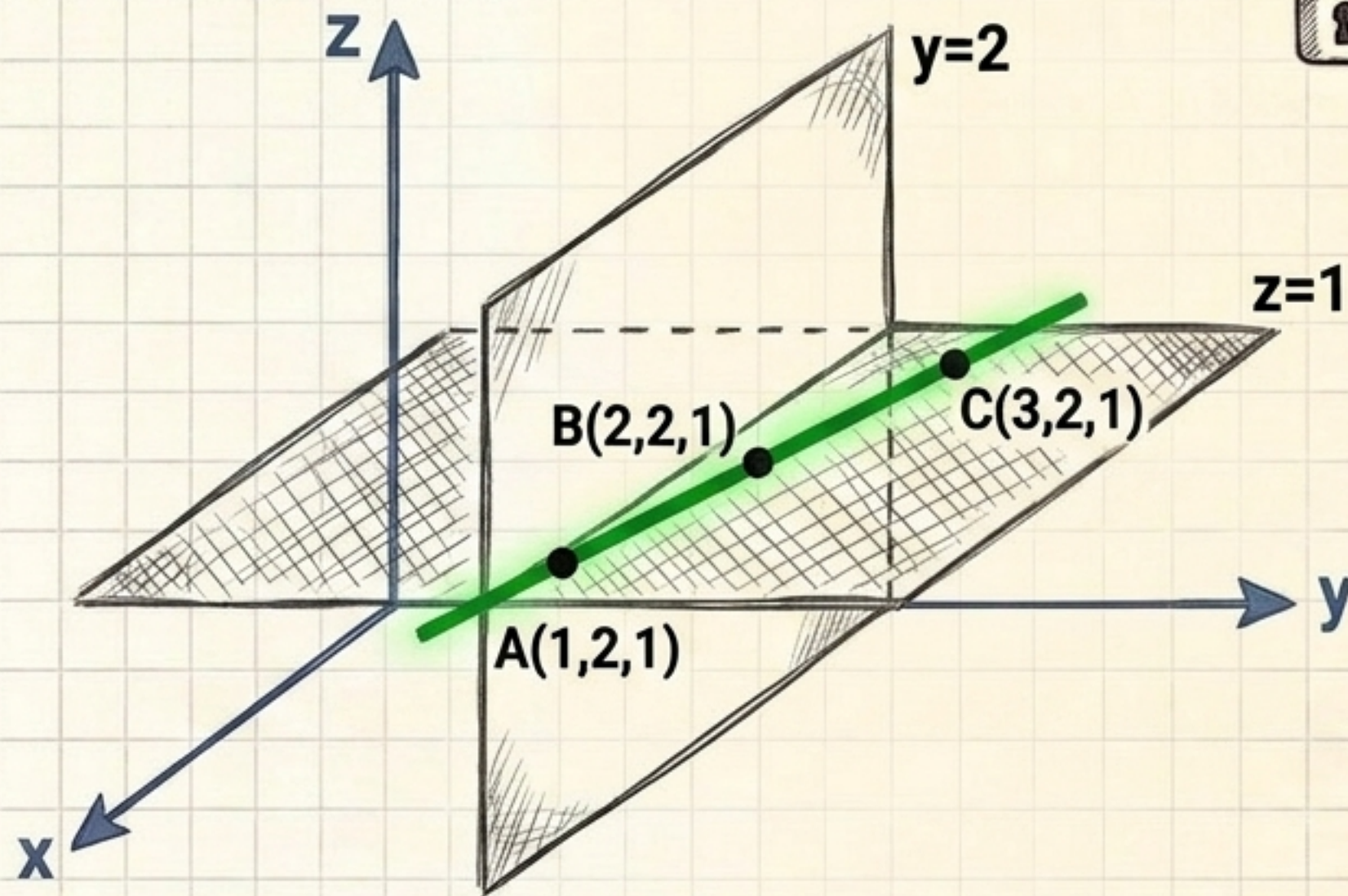
تقاطع صفحات و تولد خطوط

سوال:

اگر روی صفحه $z=1$ تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم، چه شکلی حاصل می‌شود؟

● [مسیر آبی]: ویژگی‌های مشترک:

۱. گیر افتاده در ارتفاع ۱ ($z=1$)
۲. قفل شده در عرض ۲ ($y=2$)
۳. مؤلفه x در حال تغییر و آزاد است!

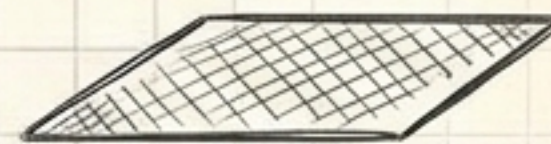
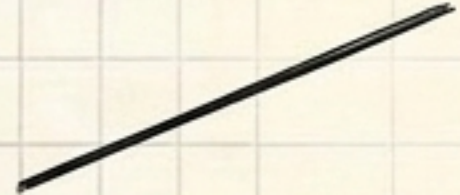


$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

● [مسیر سبز - کشف پاسخ]: محل تقاطع دو صفحه، یک خط مستمر ایجاد می‌کند که موازی محور x ها امتداد دارد. دستگاه معادلات این خط:

کالبدشکافی ابعاد (نقشه راهنمای هندسه جبری)

● قانون «قفل و آزادی»: هر متغیری که قفل می‌شود، یک بُعد از آزادی ما در فضا کم می‌کند!

 صفر متغیر قفل شده	→ 	کل فضا (۳ بُعد)
 ۱ متغیر قفل شده (مثلاً $x=c$)	→ 	یک صفحه (۲ بُعد)
 ۲ متغیر قفل شده	→ 	یک خط (۱ بُعد)
 ۳ متغیر قفل شده	→ 	یک نقطه (۰ بُعد)

💡 **تکنیک اصلی:** تعداد متغیرهای آزاد، نشان‌دهنده بُعد شکل نهایی است! 💡